This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTORUM
LIBRI VI. PRIORES PLANORUM, AC XI. ET XII. SOLIDORUM,

Cum Explicationibus, & Demonſtrationibus

CHRISTOPHORI CLAVII,

In uſum Auditorum ſuorum adornati & editi;

A

JOANNE HENRICO VAN LOM.
Philoſ. Doctore, ejusdemque Facultatis, ut & Matheſ. Profeſſore Ordinario.

Qui brevem Narrationem Hiſtoricam, de vita, ac Elementis Euclidis, addidit.

Adjectis tabulis æneis nitidioribus & accurationibus.

De Traytorrens



AMSTELODAMI,
Apud HENRICUM VIEROOT,
MDCCXXXVIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

ILLUSTRISSIMIS, NOBILISSIMIS,

GENEROSISSIMIS

VIRIS,

ACADEMIÆ

DUCATUS GELRIÆ, ET COMITATUS ZUTPHANIÆ,

CURATORIBUS.

D. ADRIANO COMITI DE LYNDEN, Domino in Nederhemert, Burg-gravio Neomagenſis Imperii; Satrapæ Regionis Cuikenſis; &c. Ad conſeſſum potentiſſimorum ordinum Foederati Belgii delegato. &c. &c. &c.

D. LEONARDO ESSENIO, Medicinæ Doctori; Civitatis Bommelienſis Conſuli; ad reditus publicos Tetrarchiæ Neomagenſis curandos, ac quondam ad Collegium Ordinum Generalium ſeptem unitarum Regionum Delegato. &c. &c. &c.

D. FRANCISCO JOANNI BARONI DE HEKEREN, Domino de Enghuyſen; Civitatis Dodechemi Conſuli; urbis atque agri Doesburgenſis Judici; Ducatus Gelriæ quæſtori ſupremo; & ad concilium ordinum foederatorum, quod eſt Hagæ comitum, Delegato. &c. &c. &c.

Digitized by Google

D. EVERH. JOANNI BENJAMINI BARONI DE GOLSTEIN.

Domino in Appel; Ordinis Teutonici Magiſtro; Civitatis Zutphanienſis conſuli; cameræ rationum, ducatus Gelriæ, & comitatus Zutphaniæ præſidi. &c. &c. &c.

D. ALEXANDRO BARONI DE DEDEM; Domino in Vosbergen, & Werfhorſt, Arnhemiæ, & oræ Velavicæ judici; Præfecturæ Dornſpyckenſis ex Equeſtri Ordine Præſidi; conſeſſus Præpotentium Procerum, qui reditus publicos Tetrarchiæ Velavicæ curant, Præſidi; Gymnaſii Velavici Curatori. &c. &c. &c.

D. ANTONIO à WESTERVELT, Domino in Eſſenburg; Civitatis Harderovicenæ Conſuli; ad collegium Ordinum Generalium, ſeptem unitarum Regionum, & Cameram Tributorum Velaviæ quondam Delegato; Gymnaſii Velavici Curatori. &c. &c. &c.

NEC NON

VIRO AMPLISSIMO, NOBILISSIMO, CONSULTISSIMO.

D. SAMUELI ESSENIO, J. U. Doctori, Curiæ Ducatus Gelriæ, & Comitatus Zutphaniæ, Senatori extraordinario; Publicorum Redituum Maeslandiæ, & Ooſterwyck quæſtori; & Curatoribus Gelro-Zutphanicæ Academicæ à ſecretis &c. &c. &c.

S. P. D.

JOANNES HENRICUS VAN LOM.

Digitized by Google

DEDICATIO.

DUm novam Euclidis Elementorum, cum Christophori Clavii, præclari ſane Mathematici, Demonſtrationibus adornatam Editionem; privatis noſtris Inſtitutionibus deſtinatam, in lucem produco publicam: Veſtro illuſtri Nomini, VIRI NOBILISSIMI ET AMPLISSIMI! conſecrare eam, ac dicare meum eſſe officium cenſui. Juſtiſſimæ enim mihi cauſæ ſunt variæ, quibus hoc opuſcu-

Digitized by Google

lum veſtris illuſtribus inſcribere nominibus, me obſtrictum eſſe ſentio. Etenim ſi mecum reputo, Vos Academiæ noſtræ curandæ præpoſitos eſſe, eique augendæ & amplificandæ egregiam & maxime laudabilem operam navare; nemini majori jure, hunc libellum noſtra cura, ea qua apparet forma, primum edendum, in Academia veſtra paratum, quam Vobis, quibus Academiæ noſtræ cura commiſſa eſt, offerre ac dicare me potuiſſe judicavi. Cui enim plus deberem, quam Vobis, qui nobis ad hæc ornanda, publici-

Digitized by Google

blicique juris facienda, otia dediſtis? Acceſſit, Vos jure optimo à me exigere poſſe ſpecimen aliquod eorum, quæ cum Auditoribus noſtris, ſuper Matheſeos principiis tracto: ac mihi Geometricorum exercitiorum, quibus ſtudioſam juventutem imbuere ſtudeo, Vobis rationem eſſe reddendam. Et quod incrementa addit, eſt, quod Vobis etiam Temporis ex occupationibus quotidianis erepti, rationem aliquam perſolvere officii mei eſſe exiſtimavi. Præterea cum ab eo tempore, à quo ad Veſtram Academiam acceſſi,

Digitized by Google

me maximis beneficiis cumulaſtis, & etiamnum favore veſtro proſequimini; primam, quæ ſeſe mihi offerret, occaſionem amplectendam eſſe putavi, ut debitæ meæ obſervantiæ, reverentiæ, & grati animi, pro acceptis adeo multis beneficiis, & gratiis, publicum exſtaret monumentum. Merito itaque gratam memoriam beneficiorum, quæ in me contuliſtis, declaro, hacque inſcriptione pie agnoſco, quod benignitatis Veſtræ, erga me, quibus multa debeo, documenta maxima ſint ac ſingularia.

Non

Digitized by Google

Non dicam opuſculum Veſtris Illuſtribus Nominibus ornatum, ac comptum, ex ipſa inſcriptione firmum ſibi conciliare præſidium. Accipite ergo GENEROSISSIMI & ILLUSTRISSIMI, Patriæ & Academiæ PATRES! hoc qualecunque munuſculum, vobis lubentiſſime dicatum & conſecratum. Quod animo humili, obſequioſo & devoto offero: Accipite hoc Vos animo ſereno, placido & benigno. Clementer accipite; credite nihil aliud me egiſſe, quam quod officii mei rationem poſtulare cenſui. Veſtro

Digitized by Google

vero AMPLISSIMI AC GENEROSISSIMI VIRI! me, meaque ſtudia, favori commendo. Ego vero me intra muſei mei parietes recipiam, Deumque immortalem, ſupplicibus exorabo precibus, ut Vobis, quos non tantum Generis ſplendor, & muneris dignitas, ſed & meritorum in Rempublicam, magnitudo illuſtres fecit, tribuere tempus quam longiſſime, Vosque cum illuſtribus veſtris familiis ſalvos, & omni felicitatis genere cumulatos, incolumes ſervare velit; ut gravibus hiſce temporibus

pru-

Digitized by Google

prudentiſſimis conſiliis veſtris & curis Decus Reipublicæ, Eccleſiæ, & Academiæ hujus tueri & augeri poſſitis, tandemque læti ac lubentes, certa beatioris vitæ in cœlis ſpe ſolutas corporis viculo animas tradere Deo. Valete & Favete. Dabam Hardervici A. D. 12. Julii. MDCCXXXVIII.

PRÆ-

Digitized by Google

PRÆFATIO.

LECTORI BENEVOLO

S.

SIſto tibi, *benevole Lector*, novam Editionem Elementorum Geometricorum, ab Euclide Geometra quondam adornatam; verum Chriſtophori Clavii Expoſitionibus, & Demonſtrationibus munitam. Ut ſcias tamen velim, me non voluntarie, ac ſponte mea, ad hæc Elementa publici juris facienda, ſed neceſſitate quadam coactum, perveniſſe. Quare paucis te in limine morari debeo,

ut

Digitized by Google

ut referam *primo* rationes, quæ me ad hæc Elementa edenda impulerunt, & urſerunt: *dein* quid in hoc opere proferendo præſtiti.

A quo Tempore mihi in hac Academia, publice Philoſophiam ac Matheſin docere, demandatum eſt: in id omni ope, induſtria & alacri ſtudio incumbere officium meum eſſe putavi, ut quovis modo poſſem, Studioſæ Juventuti, vel Philoſophiam, vel Matheſin diſcere cupienti, facilem ſimul ac utilem navare operam, ejusque commodis pro virili ſervire. Verum cúm inter Viros Eruditos hodie convenit, Studium Geometricum, baſin & fundamentum eſſe ponendum Philoſophiæ, vel ſaltem partis ejus principalis, Scientiæ nempe Rerum Naturalium, id primum mihi curæ cordique eſſe cenſui; ut

ut Juventutem Studioſam puris & ſinceris Geometriæ principiis, quibus dein ad altiora, tam Veterum, quam Recentiorum Dogmata intelligenda pervenire poſſunt, erudirem. Interim memor dicti præclari ſane Mathematici, *Davidis Gregorii* in Dedicatione, ubi dicit, *memini vero quam ſæpe reclamares Viris in re Mathematica, novitatis, compendii, & forte ſui nimium amantibus; cum interim juventutem ad ipſos fontes remittendam, Veterumque libros diligentius eſſe verſandos, terendosque, vehementer urgeres.* Ideo ad hunc Scopum aſſequiendum, Euclidea Elementa, probe intellecta imprimis nos ducere rebar; utpote tam Scriptores Antiqui, quam Recentiores ſuper hæc Elementa, ſua condunt Ædificia, cum Geometrica, tum Rerum Naturalium; propterea-

reaque ea intra privatos parietes, cum Auditoribus noſtris tractanda eſſe neceſſarium duxi. Sed cum non perinde erat, cujusnam Commentatoris vel Editoris ſequerer ductum, in exponendis coram Auditoribus noſtris Elementis iſtis, eum ſeligendum eſſe exiſtimavi, qui ſe præ cæteris Demonſtrationum perſpicuitate, & demonſtrandi rigore ac evidentia commendabat. Inter cæteros Chriſtophori Clavii Demonſtrationes, ac demonſtrandi Methodum, mecum penſitans, ambo mihi arriſere, & placuere valde. Tum ob elegantem, ac ſane perſpicuum modum, cum facilitate ſingulari conjunctum, quo in adſtruendis & probandis utitur propoſitionibus. Tum ob robur & efficacitatem, quæ ſingulis ineſt demonſtrationibus, ad perſuadendum

dum

Digitized by Google

dum de veritate rei propoſitæ, ad quas nihil excipi poteſt, cum per omnes caſus poſſibiles, rem contemplandam veram & firmam eſſe oſtendit, & ad convictionem evincit. Quibus porro acceſſit, Eum Euclidis Scopo præ multis aliis etiam optime ſatisfacere, remque ab Euclide propoſitam, ſecundum ejus mentem, acu tangere. Eo nomine laudatur à *Reyhero in Diſſert. de Euclide pag.* 40. 41. Quod *Clavius optime commentatus eſt in Euclidem*; ac uti ait, *in ejus commentariis, quicquid fere ad penitiorem Elementorum cognitionem requiritur, invenitur.* Suum etiam adjicit calculum *Ricciolus in Tomo primo Almageſti novi* de Clavio ſcribens, *quod in Geometria adeo excelluit, ut illum plurimi Mathematici velut Oraculum conſuluerint; propter eximiam*

in

in ſcriptis ſuis perſpicuitatem, cum ſolida doctrina conjunctam, dum ipſa Sole clariora ſunt. Adſtipulatur his *Janus Nicius Erythreus in pinacotheca ſua* notans, *quod ex omnibus Clavii lucubrationibus, quibus in lucem prolatis, nominis ſui memoriam, omnium ſeculorum poſteritati commendavit, eſt commentarius, quo Euclidem illuſtravit, qui talis eſt, ut in Arce poni poſſit, quaſi Minerva illa Phediæ; in qua nihil eſt niſi abſolutum & perfectum.* Et ut alia ſilentio prætercam teſtimonia, *Voſſii* tantum adducam, *de Scientiis Mathem. pag.* 69. Ubi de Clavio affirmat, *quod Eruditis omne punctum ferre viſus ſit, cum variis monumentis nominis ſui decus ad poſteros propagavit.* Quare non dubitabam, ad ipſius commentarii ductum in Euclidis Elementa, Geometrica principia Auditoribus meis tradere: cum

 per-

perſuaſum mihi habebam, in demonſtrandi ordine, me nec commodiorem nec clariorem, in ipſa re probanda, nec firmiorem nec evidentiorem Autorem ſequi poſſe. Verum brevi tempore percipiebam Clavianorum Elementorum Euclidis penuriam eſſe, cum Studioſa juventus ubique exemplaplaria ſollicite quærentes, vix ac ne vix quidem unius, alteriusque exempli compotes fieri poſſent. Accedebat etiam, quod ſi hic vel illic exemplum unum in angulo lateret, illud nimio pretio ſolvendum erat. Unde factum eſt, ut quidam me audientes, aut audituri, quotidie queritarentur, quod Autoris, cujus veſtigia legebam, participes fieri non poſſent. Porro Editiones Clavianæ, ſexcentis & pluribus erroribus ſcatent, ſeu vitiis Typographi-

Digitized by Google

graphicis innumeris laborant, qui Tyronibus in Demonſtrationibus perlegendis, ac imitandis omnino moram injicere debent; ſi non aliquando ad propoſitionis intelligentiam inſequendam, prorſus impedimento ſint. Ulterius Figuræ, quæ ad propoſitiones illuſtrandas adjectæ ſunt, quæ omnino claræ & diſtinctæ, ad faciliorem intelligentiam deſiderantur; ſunt confuſæ & vitioſæ admodum, immo quandoque exiguæ nimis; uti ſunt eæ ſolidorum, quæ ſane ob linearum multitudinem, & varias ſuperficies in quibus jacent, præprimis accuratæ & juſtæ magnitudinis exiſtere debent. Deſunt aliquando lineæ, quæ ad conſtructionem requiruntur, deſunt perſæpe litteræ, quæ in verbis demonſtrationum citantur, & non

Digitized by Google

raro perverſo loco ſunt poſitæ ; quare neceſſe eſt ut Tyrones ſæpe confundant , ac ineuntes conſtructionem moram iis injiciant , quod profecto moleſtum , & in nonnullis faſtidium movet , præcipue iis qui prima vice Autoris demonſtrationes imitantur. Præterea citationes , quæ in margine , juxta demonſtrationum verba , poſitæ reperiuntur , ſuis etiam non carent vitiis , in iis autem indicantur ea , quæ in præcedentibus conceſſa vel demonſtrata , jam Elementa exiſtunt ac principia , eorum quæ in illa demonſtratione adſtruuntur , quorum noſtra ſcire intereſt ; quapropter eos , qui non ſatis familiares habent Euclideas propoſitiones , ſæpe ob præpoſteram citationem , privant fundamento vero , ſuper quod tamen condita

eſt

eſt probatio. Denique licet Clavii Commentarius in Elementa Euclidis ſit omni laude dignus, tamen Tyronibus prolixus nimium eſt, ſi nempe oculos noſtros convertamus vel in Definitionum expoſitiones, vel in ea, quæ ſingulis fere adjunxit demonſtrationibus propoſitionum. Ea quamvis in ſe bona & laudanda ſunt, Incipientes tamen, qui Euclidea Elementa ſcire cupiunt, iis carere poſſunt; cum haud raro tales, multiplici materia, quam in iis adducit, obruuntur, non diſtinguentes ea quæ Euclidis, ab iis quæ Clavius de ſe addidit, vel ex aliis mutuo deſumſit; hinc mira in Tyronibus confuſio, quæ cane pejor & angue deterior in *Matheſi* evitanda, ac omni conatu cavenda. Quæ omnia etſi cum animo meo ſæpiuſcule vol-

Digitized by Google

vebam ac revolvebam, tamen refugiebam initio novam adornare Editionem Clavianam; verum cum quotidie de penuria Exemplarium Auditorum meorum quærelæ ad meas perveniebant Aures, in anguſtiam redigebar, vel Clavium ducem in Geometria exponenda relinquere, ejusque loco alium ſeligere, quod repugnanter facerem; vel efficere ut recuderentur Elementa Euclidea à Clavio confecta. Verum cum utrumque ponderarem, magis è re auditorum meorum fore judicabam, Clavium porro ducem præeuntem, in contemplationibus noſtris Geometricis, ſequi. Idcirco in uſum tantum Auditorum meorum, ac eorum gratia novam hanc Editionem, in qua vitiis ſupra memoratis obviam ire, & quantum in me eſt, evitare ſtu-

Digitized by Google

ſtudui ; ex Clavii commentariis collectam , parare decrevi. En rationes *benevole Lector* , quæ me impulere ad hanc Editionem publici juris faciendam. Super eſt ut nunc etiam brevibus enarrem, quid in hac Editione præſtiti , vel ſaltem præſtare conatus fui. Et quidem *primo* è libris tredecim ab Euclide conſcriptis , in quos omnes etiam commentatus eſt Clavius , *ſex priores* , *ac undecimum & duodecimum librum* ſolummodo edi curavi ; quia cum Planorum Elementis , Solidorum conjungenda eſſe , tanquam cognitu ſumme neceſſaria , ſic firma mihi ſtabat ſententia. In qua tantum præclaros in Geometria Viros præeuntes ſecutus fui , nempe Tacquetos , Dechaleſios , Moreos , Ozanamos , Keilios , aliosque. Non tamen prætermiſi reliquos , quia

eos inutiles judicabam. Verum cum Tyronibus, qui inſtitutionibus noſtris privatis ſe committunt, hæc Elementa ſolummodo paravi, illi intellectis Planorum & Solidorum Elementis, reliquis in libris, ſi ipſis ita viſum ſit, dein cum fructu ſe exercere poſſunt. Illorum permagni intereſt, ſcire Elementa Planorum, ac Solidorum, quæ ſex prioribus, & duobus reliquis, undecimo ac duodecimo libro continentur; utpote ea fundamenta ſunt, quibus noſtra Rerum naturalium Doctrina nititur. *Secundo* explicationes, quas Clavius ſuper Definitionibus, Axiomatibusque Euclideis dedit, quales definitionibus ac axiomatis addidit, quaſque prolixas nimium judicavi, ac quæ vel praxin aliquam, vel aliud quid ad Euclidis verba, & verborum ſenſum in-

intelligendum non directe ducens, continebant, pro captu meo contraxi. Ita tamen, ut ſecundum *Clavii* ſententiam, ſenſum verborum Euclidis, ſatis clare declarent; nimiam interim evitavi brevitatem, ne dum brevis eſſe volo, obſcurus fio. *Tertio* Scholia, Praxes, aliaque, quæ Clavius Propoſitionibus Euclideis, ſuisque demonſtrationibus ſubjunxit, omiſi pleraque omnia; exceptis tamen iis Scholiis, Lemmatibusque, quibus in ſuis demonſtrationibus utitur Clavius: dum iis carere non poſſumus, quia ad ea, tanquam ad principia & fundamenta probationum, in iis provocat. Ob eandem rationem, quia è multis Corollariis petit argumenta demonſtrationis ſuæ, plurima ſervavi Corollaria, quæ Clavius è probationibus ſuis elicuit.

Digitized by Google

cuit. *Quarto* Definitiones, Poſtulata, Axiomata, & Propoſitiones, quæ in Clavii Commentario in Euclidem occurrunt, omnes typis mandavi. Verum eas omnes contulimus cum definitionibus, axiomatibus, poſtulatis & Propoſitionibus, quæ in Gregorii Editione Græco-latina expreſſæ exſtant; quas vero in Gregoriana reperire mihi non licuit, quasque Clavius vel de ſuo adjecit, vel ex aliis mutuo deſumſit, eas omnes duabus ejusmodi [ ] uncinulis includi curavimus. Ut ſcilicet illi, qui Euclidem purum deſiderant, unico obtutu videre poſſint, ea, quæ Euclidis ſunt, eaque diſtinguere ab iis, quæ à Clavio ſunt addita. *Quinto* quantum in me fuit, errores quos detexi in Editione Clavii, tum in ipſo textu, tum in

Digitized by Google

in litteris, quæ reſpondent iis, quæ in ſchematibus ſunt expreſſæ, quæ lineas neceſſarias figurarum annexarum declarant, corrigere ſedulo ſtudui: uti & citationes omnes in margine poſitas, male allatas, reſtituere omni ope niſus fui; forte hic vel illic mendum aliquod remanſit; verum quis omnes poteſt cavere errores? cum ne Argus quidem ſufficeret. Id ſaltem effeci, ut nunc multo correctior, quam priores omnes Clavii Editiones, lucem adſpiciat. *Sexto* Figuras, ad propoſitionum intelligentiam facilem reddendam, accommodatas, ſeparatim æri incidi curavi; in iis elaborandis; id præprimis ſtudui; ut clare & diſtincte ante oculos ponerent, omnes lineas ad conſtructionem, ac ad ejus compoſitionem neceſſarias; ne vero

Digitized by Google

ro lineæ inter ſe confunderentur majuſculas depinxi; ac quæ ad ſolidorum ducunt notitiam, quæ in prioribus Editionibus, præcipue quæ in forma octava, ut ajunt, ſunt, confuſæ ac vitioſæ admodum erant; diſtinctiores multo elaboravi, ut Tyrones ſibi magis vivide conſtructionem figurarum repræſentare poſſint. Interea ſedulo cavi, ut litteræ in figuris expreſſæ reſponderent iis, quæ in Demonſtrationibus occurrunt. *Septimo* his Elementis præmiſimus, Hiſtoricam narrationem brevem de Euclidis vita, ac Elementis, de qua tamen non multum polliceri audemus, quoniam extra forum meum eſt, accuratam ac omnibus numeris abſolutam tradere hiſtoriam, quare à Lectore comiter expetimus, ut ſi forte ea non arrideat, vel errores

Digitized by Google

errores quosdam in ea detegat, in meliorem partem interpretari velit, cum nimis ſero in ea incidi cogitata, ut de vita Euclidis quædam narrare in animum induxerim. In reliquis Clavium ſumus ſecuti, cum cuilibet propoſitioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus ſignificat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum eſt ſecutus in Euclidis Propoſitionibus. Alter vero in ipſa Propoſitionum ſerie deſcriptus refert diſpoſitionem propoſitionum ex traditione Theonis, ſeu potius ipſius Euclidis, qui etiam obſervatur in codicibus Græcis. Id vero eo conſilio factum eſt, quoniam cum à quibusdam Geometris propoſitiones Euclidis juxta ordinem Campani, ab aliis vero juxta Theonis ſeriem citentur; ideo

ideo neceſſarium eſſe duximus, ut utriusque interpretis numerus apponeretur. Denique ne curſus demonſtrationum interrumperetur, citavimus principia & propoſitiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, cui ſimilis literula reſpondet in demonſtratione, ut facilius cognoſcatur, ad quem locum quælibet citatio ſit referenda. Citationes vero ipſæ hoc modo intelligendæ ſunt; I. *Def.* ſignificat prima definitio; I. *Pet.* prima petitio, vel primum poſtulatum, I. *Prim.* prima propoſitio primi libri, 23. *Undec.* ſignificat propoſitio vigeſima tertia undecimi libri: & ſic de reliquis; ex quibus reliquæ citationes facile intelliguntur. Vale, Lector benevole, & conatibus noſtris fave: ſimul peto, ut ſi quædam ſuperſint errata, benigne excuſes. Scribebam Hard. menſe julio CIƆIƆCCXXXVIII.

BREVIS

Errata typographica quæ inter relegendum mihi occurrere, hoc modo corrigat Benevolus Lector.

Pag.	Lin.		Pro	Lege
20.	6.		Onnis	Omnis
31.	*ultima.*		ſitalterius	ſit alterius
33.	19.		utrumqu.	utrumque
38.	13.		que BA	quæ BA.
39.	2.		om nia	omnia
59.	18.		rectis	rectis.
61.	23.		externus DCF,	externus DCE,
93.	17.		ipſi CF,	ipſi CE,
96.	17.		rectaugulo	rectangulo
105.	24.	in marg.	10. def.	10. def. primi
107.	22.	in marg.	10. def.	10. def. primi
109.	12.	in marg.	15. def.	15. def. primi
	28.	in marg.	15. def.	15. def. primi
124.	5.		recta quædem	recta quædam
154.	20.		deſcribendns	deſcribendus
156.	9.		Quareq uadratum	Quare quadratum.
165.	35.		THEOR.	PROBL.
171.	5.		habituto	habitudo
173.	2.	à fine	æquemultiplicia	æque multiplicia
174.	4.		æquemultiplicia	æque multiplicia
	7.		æquemultiplicia	æque multiplicia
189.	28.		nna	una
208.	2.	a fine	primo	prima
220.	23.		permutamdo	permutando
227.	5.	a fine	conſtituantur	conſtituatur
237.	4.	a fine	ad CA,	ad DA,
267.	17.		cnm ſexta	cum ſexta
274.	7.		imagininemur	imaginemur
277.	22.		angulii	anguli
380.	27.		circulus	circulis

Digitized by Google

BREVIS NARRATIO HISTORICA DE EUCLIDIS VITA, AC ELEMENTIS.

§. I. Cum novam hanc Elementorum *Euclidis*, ex *Chriſtophori Clavii Bambergenſis*, inſignis ſane Geometræ, in Euclidis Elementa, commentariis, collectam Editionem, auditoribus, qui privatis noſtris inſtitutionibus in Geometriæ ſcientia erudiri cupiunt, pararem; haud ab inſtituto alienum eſſe putavi, breviter de Autore noſtro, ac Elementis, quæ de rebus Geometricis compoſuit, quædam recenſere. Scilicet ut aliquam ſaltem habere cognitionem Autoris, ac Operis, quem tractemus, illi poſſint, qui nos ea Elementa exponentes au-

Digitized by Google

audient. Tum ut eorum, quæ de Euclide narrantur, ac quæ de his Elementis à Viris Doctiſſimis foventur ſententiæ, non ſint penitus rudes. Tum ut aliquantum intelligant, quæ de iis tenenda, vel rejicienda videntur. Antequam vero ad ipſam de *Euclide* narrationem me accingam, cum in ſequentibus nobis uſui futura ſint, & verbo referre de Geometriæ natalibus, ſecundum quorundam ſententiam; & perbreviter eorum clarorum Mathematicorum, qui ante *Euclidem* ſuis inventis præ cæteris excelluere, mentionem facere; haud incongruum foré duximus.

In Geometriæ Originem, unde Mortales primo de ejuſmodi ſtudii genere cogitandi anſam cepere; & Autorem à quo primum inventa eſt nobilis hæc ſcientia; & quo demum tempore elucere inchoavit præclarum hoc ſtudium, ſi inquiramus: Multa nobis in iis occurrent, quæ ut certo affirmentur, non ſatis manifeſta & evidentia videntur. Non enim latet, quosdam aſſerere, eam Doctrinam ab Ægyptiis, neceſſitate quadam coactis, ab initio fuiſſe inventam. Opinantur ſcilicet eos ob annuas Nili inundationes, quibus agrorum limites operirentur limo, ac ſic confunderentur; arte quadam ac ſcientia, qua rurſus agri dividerentur, opus habuiſſe. Verum hanc rite penſitantes opinionem, ſpeciem magis veri habere, quam ut certum aliquid de Originis cauſa probet, cuilibet attendenti apparebit. Deſunt enim nobis Veterum teſtimonia ſufficientia, quibus

bus de ortus ratione firmo ſuo ſtat talo hæc ſententia. Si JOSEPHO *antiquitatum lib.* 1. *cap.* 9. fidem habeamus, ſtudium hoc Geometricum à *Chaldæis*, *Aſſyriisque* fuiſſe excultum, ac ab *Abrahamo*, juſſu Dei in Palæſtinam, ac inde in Ægyptum profecto, in illud Regnum tum primum fuiſſe tranſlatum; ibidem teſtatur. Ægyptii vero ipſi, certi cujusdam autoris forte inſcii, Deo ſuo, *Theuth* dicto, inventionis gloriam tribuunt, uti refert PLATO *in Phædro operum pag. m.* 268. *col.* 1. *in princ.* ubi ita ſcribit de *Theuth* loquens; *Hunc primum omnium numerum, & numeri computationem inveniſſe, Geometriamque, & Aſtronomiam, &c.* Verum dubia licet ea ſint, quæ de Origine apud Ægyptios quærenda, narrant Autores; id tamen ſatis certo conſtat, Ægyptios hoc Doctrinæ genus coluiſſe. Etenim *Thaletem Mileſium*, qui fere ſexcentis ante natum Chriſtum annis, ſecundo ab Urbe condita ſeculo, in Græcia floruit; in Ægyptum iter facientem, indeque in Græcum Solum reverſum; traduxiſſe Geometriæ Scientiam, ex LAERTIO diſcimus. Qui ſimul nobis autor eſt, *Euphorbum Phrygem* præcedenti ſeculo Contemplationes Geometricas de lineis jam compoſuiſſe; monente DECHALES *in Tractatu Proœmiali de progreſſu Matheſ. cap.* 2. *Thaletem* proxime ſecutus eſt *Mamertinus*, qui præclarus celebratur Geometra. Quo eodem tempore, *Amethiſtum* hujus ſcientiæ [illegible]arum, vixiſſe ſtatuunt. Hos [illegible]xcepit excellens ille Geome-

 triæ

triæ Stator *Pythagoras Samius*; qui à multis, Geometriæ in Græciam advectæ autor habetur: quocum ſecundum effluxit ſeculum.

Tertium quod ſequitur ab Urbe condita ſeculum, plures produxit in hoc ſtudiorum genere præſtantes viros; inter quos primo numerantur *Anaxagoras Clazomenius*, qui *Pythagora* ſucceſſit; dein *Oenopides Chius*, hujusque diſcipulus, *Zenodorus*; & qui *Zenodorum* proxime ſecutus eſt, è mercatore Geometra, *Hippocrates Chius*: Hic imprimis celebratur, quod primus Elementorum Geometricorum, quæ temporis injuria periere, Scriptor exſtiterit. Hos excepere *Theodorus Cyrenæus*, *Timæus Locrus*, Mathematum Scriptor.

Quartum, quod poſt hos Autores, illuxit ſeculum, Geometriæ ſtudioſorum & inventorum valde fuit fertile. In eo claruere *Democritus Mileſius*, hujusque æqualis *Protagoras*; Hos ſecutus *Plato Athenienſis*, divinus cognominatus, ſtrenuus Matheſeos cultor; de quo referunt, Eum ſingulis diebus Geometricum Problema, diſcipulis ſuis expoſuiſſe. Quem deinceps inſecuti, *Amiclas Heracleotes*, *Leodamas Thaſius*, & *Neoclides*; *Platonis* aut auditores, aut familiares; *Leon* porro illis ſucceſſit, qui ſecundus dicitur, à quo Elementa Geometrica, auctiora, quam ea *Hippocratis*, quæ ſimul ac priora, temporis injuriam paſſa, non exſtant; ſcriptis expoſita fuere. Poſtea exſtitere *Eudoxus Gnidius*, vel ut alii ſcribunt, *Cnidius*, *Platonis* in Ægyptum comes, qui quintum Elementum Euclidis

dis de Proportionibus inveniſſe dicitur; ac *Theatetus Athenienſis*, cui de quinque ſolidis corporibus ſcriptum tribuitur, verum ejus non exſtat lucubratio; inſecuti ſunt deìn *Bryſo*, & *Antiphon*.

In quinto ab Urbe condita ſeculo floruere, *Theudius Magnes*, tertius qui numeratur Elementorum Geometricorum ſcriptor: *Hermotimus Colophonius*; *Cyzicinus Athenienſis*; *Ariſtæus Senior*; *Philippus Metæus*; *Platonis* magiſtri diſcipulus: *Menechmus*; *Eudoxi* diſcipulus; *Geminus*; *Perſeus Citticus*; *Ariſtoteles*; ac tandem Geometriæ illud ſydus eluxit EUCLIDES; qui licet his Geometris poſterior fuerit; ac ex iisdem nonnulli Elementa Geometrica Scriptis reliquerint, tamen omnium antiquiſſimus habetur à VOSSIO *de Scientiis Mathematicis cap.* 15. §. 1. quorum labores in Geometria habemus; ac omnium Græcorum primus, qui omnia collegit, collectaque digeſſit. Hunc Autorum catalogum partim me texere docuere, CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES *in tractatu Proœm. de progreſſu Matheſeos, præmiſſo tom.* 1. *Mundi Mathematici*; qui eum ſe è PROCLI libro 2. *Commentariorum in Euclidem* hauſiſſe dicit: partim TACQUET *in Hiſtorica narratione de ortu & progreſſu Matheſeos.*

§. II. Ex his vero omnibus Geometris, licet cuncti clari celebrentur, propter Doctrinæ Geometricæ peritiam; quam tum ſuis inventis dicarunt, tum ſua notitia & cultu meliorem, ac firmiorem reddiderunt; EU-

CLIDEM tamen ſolum elegimus, de quo pauca hiſce paginis referremus. In vitam hujus Geometræ itaque inquirentes, Solum ejus natale, quod tulit hunc Atlantem Geometricum, ſeſe inveſtigandum ſponte nobis ſiſtit. Sed ſuper hoc Autorum ſententias rogantes, quod capita, tot fere ſententiæ reperimus; adeo diſſentiunt inter ſe Autores de ſtatuenda Patria *Euclidis* noſtri. Quidam ejus Patriam, GELAM, civitatem *Siciliæ*, fuiſſe putant; ac ea de re *Euclides Geometra*, *Gelous* apud illos audit: inter quos eſt Scriptor Bibliothecæ Veteris Siculæ, anno 1700. à Meſſanenſi quodam editæ, referente FABRICIO *Biblioth. Græc. Lib.* III. *Cap.* XIV. §. 1. Eam opinionem, qua *Euclidem* è *Gela* oriundum cenſent, forte è *Laërtio* collegere; quia LAERTIUS. *Lib.* II. *ſegm.* 106. de Euclide Megarenſi ſcribit, quod ſecundum quosdam *Gelous* ſit habitus. Verum hæc ſententia ſuo videtur privari fundamento, ſi in ſequentibus §. 9. palam conſtiterit, eum, de quo ſcribit *Laërtius*, *Euclidem*, diverſum eſſe à noſtro *Geometra*; quare ex eo principio *Geometræ Euclidis* Terram parentem, *Gelam* fuiſſe, aſſerere non auderem. HARDUINUS *ad Plinium* Autorem noſtrum PERGA, civitate *Pamphiliæ* oriundum cenſet; at monet FABRICIUS *loco citato*, *Apollonium* Conicorum Scriptorem, in animo tum habuiſſe *Harduinum*, cum id de *Euclidis Geometræ* patriis ſcripſit ſedibus. Nam inter Scriptores tam Veteres quam Recentiores id ſatis manifeſto conſtat; *Apollonium*, *Pergam* ſedem

ſedem natalem habuiſſe; Verum deſunt nobis teſtimonia, in quibus *Euclidem Pergæ* natum, educatumque fuiſſe, aſſeritur. Alia porro, ſed incerti Autoris, de *Euclidis Geometræ* patriæ Solo eſt cogitatio; videtur tamen ea eſſe Hiſtorici cujusdam Arabis, ex quo illam depromplit GREGORIUS ABULPHARAJUS *in hiſtor. compend. Dynaſtarum* arabice edita, & latine verſa à *Pocokio.* In qua Autor ille hanc fovet opinionem, quod *Euclides Geometra* è civitate TYRO ortum duxerit, ac propterea eum *Tyrium* facit. Monente KONIGIO *in Bibliotheca Veteri & Nova.* Sed præterquam quod hujus ſententiæ Autor ſit incognitus, præterea etiam Veterum deſunt judicia, quibus hæc corroboranda foret. Longe vero vulgarior, quæ etiam plurimos nacta eſt, inter Viros Doctos, Patronos, eſt exiſtimatio; *Euclidem Geometram*, MEGARÆ, quæ *Græciæ* oppidum eſt, juxta Iſthmum Corinthiacum, natum fuiſſe: ideo *Megarenſem* Eum vocare ſolent. Hanc opinionem CAMPANUS habuiſſe videtur, uti ex inſcriptione Elementorum à ſe editorum haud obſcure colligere eſt; cum ea inſcribit *Euclidis Megarenſis Mathematici clariſſimi Elementorum Geometricorum libri* xv. Cui calculum ſuum adjecit FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA, inſcribens commentarium ſuum in *Euclidem*; *Euclidis Megarenſis Mathematici clariſſimi Elementa Geometrica.* Idem ſenſere GESNERUS *in Bibliotheca.* Uti & ABDIAS TREW eidem

dem huic ſententiæ favet, quod ſequentia verſicula ſatis declarant.

Fundamenta, quibus conſurgit tota Matheſis,
Cyclum cum numero, tu Megaræe, doces.

In eandem accipiunt partem, RICCIOLUS *in Chronici parte ſecunda, præmiſſi Tomo primo Almageſti novi*, ad vocabulum *Euclides*; ac multi alii. Fortaſſe horum multum labefactabitur cogitatio, ſi in poſterum §. 8. & 9. conſtiterit, *Euclidem Megarenſem*, qui ſæpe confunditur cum *Geometra* noſtro, omnino diſtinguendum eſſe ab *Euclide* Elementorum Scriptore. Diſſentiunt ab his pariter multi Viri Eruditi, exiſtimantes *Euclidem* noſtrum *Alexandrinum* fuiſſe; cum ALEXANDRIÆ, *Ægypti* prænobilis urbis; quæ hodie Turcis *Scanderia*, Italis vero *Aleſſandria* appellatur, in illa planitie, quæ Mareotem Lacum, & mare mediterraneum interjacet: ab *Alexandro Magno*, per *Dinocratem* Architectum Macedonem, conditæ; præclarum hunc Geometram vel lucem adſpexiſſe primo; vel, quæ magis manifeſta, monumentis Veterum fulcita, in ea ipſum floruiſſe civitate aſſerunt. Nam *Alexandria* Eum fuiſſe genitum difficulter aſſerere auderem, cum diſertum nullum de natalitio iſto *Euclidis* oppido, Veteris alicujus Scriptoris teſtimonium habemus; obſervante FABRICIO *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* XIV. §. I. *ac* GREGORIO *in præfat. in Euclidem.* Potius ſubſcriberem ſententiæ, affirmanti, minime certo

certo conſtare, quo Genere aut Patria oriundus ſit *Euclides Geometra*: à cujus partibus ſtant GREGORIUS *loc. cit.* & CLAVIUS *in proleg. in Euclidem.* Quippe penes Autores Veteres, expreſſis nihil reperitur verbis, ubi locorum ortus eſt *Euclides Geometra.* Si vero conjecturis, & quidem plauſibilibus, hic ullus ſit locus, forte *Alexandria*, *Euclidis* noſtri incunabula haberi poſſunt; ſi ſaltem, ubi imprimis floruerit, ibidem etiam primo lucem adſpexiſſe ſtatuatur. Nam quamvis Scriptores Veteres taceant, de natali urbe noſtri Geometræ, tamen manifeſto ſatis, ubi inclaruit noſtrum Geometriæ ſidus, in ſuis monumentis declarant. Etenim PROCLUS *in ſecundo comment. in Euclid.* nobis teſtis eſt, *Euclidem Geometram* in Ægypto vixiſſe; referente VOSSIO *de ſcientiis Mathemat. cap.* 15. §. 1. Ac præterea PAPPUS ALEXANDRINUS, qui circa annum Domini 390. vel 400. floruit, teſte RICCIOLO *Chron. pars.* 2. *ad vocabulum Pappus*; autor eſt, *Euclidem Geometram Alexandriæ* Scholam celebrem habuiſſe, ac diſcipulis ibidem operam dediſſe. *vid. ejus collect. Mathem. lib.* 7. *pag. m.* 240. idem referunt VOSSIUS *loc. cit.* quod *Alexandriæ* nempe Matheſin docuerit *Euclides Geometra.* Conſentiente GRONOVIO *in notis ad Gellii lib.* 1. *cap.* 20. Immo GREGORIUS *loc. cit.* ſcribit. *Primum Eum fuiſſe qui iſta in urbe Matheſin felicibus auſpiciis docuit.* Quin & hæc Schola Mathematica *Alexandriæ* primo, *Euclidis* ductu, condita, optime de re Geometrica merita, quam plu-

 rimos

rimos produxit diſcipulos. De qua ſequentia notat VOSSIUS *loc. cit. Valde autem illud commendat Scholam ab Euclide erectam Alexandriæ, quod non ſolum multos reliquerit diſcipulos; ſed ab ejus tempore uſque ad tempora Sarracenica, vix ullum invenire ſit nobilem Mathematicum; quin vel Patria fuerit Alexandrinus, vel ſaltem Alexandriæ dederit operam Matheſi.* Ex quibus haud collectu difficile eſt, *Euclidem Geometram* multum ac diu *Alexandriæ* verſatum fuiſſe, iſtoque in oppido fixam tenuiſſe ſedem; ac forte ibidem prognatum eſſe. Quapropter eo nomine *Alexandrinum* Eum merito dici poſſe conjicio.

§. III. Ætatem ejus quod attinet, de ea iterum varias in partes abeunt Viri Docti. Etenim GEORG. REISKIUS *in Margarita ſua Philoſophica lib.* VI. *cap.* I. de tempore quando floruit *Euclides* noſter miram alit opinionem; dum aſſerit, *Euclidem Geometram Hippocrate* eſſe antiquiorem; cum ejus patrem fuiſſe ſcribit. At vero exigui momenti hæc videtur ſententia, quæ auctoritate nulla Veteris alicujus Scriptoris nititur. VALERIUS MAXIMUS vero *lib.* 8. *cap.* 12. longe ab eo diſſenſit, qui *Euclidis Geometræ* ætatem incidiſſe in *Platonis* tempora ſtatuit; eumque *Platoni* coævum facit: ſcribit enim *loc. cit.* conductores aræ ſacræ à *Platone* ad *Euclidem Geometram* fuiſſe miſſos. Quibus verbis manifeſto declarat, quod exiſtimaverit, cum *Plato* inter vivos ſupereſſet, *Euclidem Geometram* vixiſſe. Hujus Autoris veſtigia

ſtigia ſequuntur illi, qui *Euclidem* ad *Platonis* tempora referunt. Sed notant Viri Docti ad hunc locum *Valerii Maximi*, Eum ibidem commiſiſſe errorem; uti §. 8. adducemus. Quapropter, cum præter *Valerium*, alium nullum habemus Scriptorem præeuntem, dubia omnino, ac penitus rejicienda eſt ſententia ea, qua *Euclides Geometra* ætatis ejuſdem cum *Platone* cenſetur. In diverſam iterum abit partem GREG. ABULPHARAJUS *in Hiſt. comp. Dynaſt.* *Euclidem Geometram*, *Platone* multo juniorem ſtatuens, cum natu minorem *Apollonio*, qui longe poſt Tempora *Platonis* claruit, eum fuiſſe ſcribit. Verum neque hæc de vitæ tempore *Euclidis* omnibus numeris perfecta eſt opinio; Contradicunt enim unanimi conſenſu Veterum monumenta, in quibus *Apollonius Archimede Syracuſano*, qui *Euclide Geometra* natu minor eſt, poſterior ætate ponitur. Quibus addi meretur *Apollonium* ſua ſcripta, ſuper Euclidea Elementa tanquam firma principia, & fundamenta ædificaſſe; quæque idcirco tempore priora eſſe debuerint. Sed miſſis iis omnibus, quæ à Recentioribus Scriptoribus, de tempore, quo floruiſſe putant [illegible] *Geometram*, narrantur; ad Veterum [illegible] confugiendum eſſe cenſemus, illosque [illegible]dos eſſe, quid de ætate *Euclidis* [illegible], ut verum, vel ſaltem veritati [illegible], vitæ tempus Autoris noſtri ex [illegible]. Quare meo judicio haud [illegible] ſunt *Procli*, & Antiquorum [illegible], [illegible] quibus *Proclus* ſua hauſit, teſtimo-

ſtimonia. Illi autem ſcribunt, *Euclidem Geometram*, *Hippocrate*, *Leonte*, *Theudio*, *Hermotimo*, *Socrate*, *Platone*, *Eudoxo*, *Platonis* diſcipulo, *Menæchmo*, *Eudoxi* diſcipulo, natu minorem eſſe; verum *Eratoſthene*, & *Archimede*, quia is *Euclidis* mentionem facit, natu majorem. Etenim PROCLUS *in lib.* 2. *comment. in Euclid.* commemoratis aliquot, *Platone* antiquioribus, æqualibus, ac diſcipulis, ſubjicit *Euclidem*, qui Elementa conſcripſit, non multo ætate poſteriorem illis fuiſſe; immo addit dein, *Euclidem* natu minorem eſſe *Platone*, minimum nonaginta annis. Porro ex eodem autore *Proclo* ſpecialius diſcimus, *Euclidem* noſtrum in Ægypto, ſub *Ptolemæo Lagi*, poſt *Alexandri Magni* mortem, primo Ægypti Rege, floruiſſe. Quam ſententiam amplectuntur GREGORIUS *in præfat. in Euclid.* ac CLAVIUS *in Proleg. Euclidem.* ut & COMMANDINUS *in præfat. in Euclid.* RAMUS *in Schola Mathematica* & multi alii. Immo ſi RAMO *loc. cit. lib.* I. *pag.* 22. *&* 23. & FABRICIO *in Bibl. Græc. lib.* III. *cap.* XIV. §. I. credimus, noſter Geometra huic *Ptolemæo* fuit notus: addunt præterea è *Proclo* eum à *Ptolemæo* Rege interrogatum fuiſſe; num quid eſſet via ad Geometriam magis compendiaria, quam ſit iſta ϛοιχείωσις? (Ita à *Proclo* fere ſemper vocatur) ad quam quæſtionem ipſi à Rege propoſitam, eum reſpondiſſe refert *Proclus*: μη εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπι γεωμετρίαν: id eſt, *non eſſe Regiam viam ad Geometriam.* Conferatur SAMUEL TENULIUS *in notis ſuis ad Jamblichi*

com-

comment. in Nicomachi Arithmeticam. Ubi etiam ſub *Ptolemæo Lagi* filio in *Ægypto Euclidem* fuiſſe profeſſum affirmat. Hanc autem de ætate *Euclidis* è *Procli* ſcriptis ſententiam collectam perpendentes, ei plus ponderis & firmitatis ineſſe, quam cæteris antea recenſitis, qui ad ſequentia attendit, facile concedet. Nam nobiſcum recolentes tempus, quo vixit *Proclus Lycius*, cognominatus *Diadochus*, id eſt ſucceſſor, quod circa annum Chriſti quingenteſimum incidit; teſte VOSSIO *de ſcient. Math. cap.* 33. *b.* §. 26. & BLANCANO *in Chronol. Mathem.* optime hac de re ex ſcriptis Græcorum antiquis, quæ ſucceſſu temporis periere, erudiri potuit. Accedit quod ea, quæ de ætate *Euclidis* refert *Proclus*, ex *Theophraſti* & *Eudemi* ſcriptis Hiſtoriarum Geometricarum, quæ dein deperdita ſunt, mutuo deſumſit: teſtante COMMANDINO *loc. cit.* RAMO *loc. cit.* & TAC[illegible] *de ortu & Progreſſu Matheſ. pag.* 21. [illegible] vero hi Autores Hiſtoriarum Geome[illegible]m compoſuerint libros, LAERTIUS [illegible] vita *Theophraſti Ereſſii* narrat; Eum qua[illegible] libros Hiſtoriarum Geometricarum [illegible] reliquiſſe; pariter *Eudemi* Hiſtoriæ [illegible] laudantur à SIMPLICIO *ad lib.* [illegible]*totelis.* Conferatur JONSIUS *de* [illegible]*iſtor. Philoſ. lib.* 1. *cap.* XV. Ex [illegible] de vero vitæ tempore *Euclidis* [illegible]ari potuit PROCLUS; cum hi [illegible] tempore ac *Euclides* floruerint; [illegible]taneos eos fuiſſe MENAGIUS [illegible] *Laert. lib.* 5. *ſegm.* 42. obſervat; utpote

pote *Theophraſtum* & *Eudemum Ariſtotelis* diſcipulos fuiſſe aſſerit. GRONOVIUS vero *in not. ad Auli Gellii lib.* 13. *cap.* 5. *Ariſtotelis* ſodales fuiſſe notat. Porro VOSSIUS *loc. ſupra cit. cap.* 15. §. 1. ſcribit *Theophraſtum* eodem ac *Euclides* tempore vixiſſe. Quibus juſte ad lancem æquiſſimam ponderatis, in errores nos non incidere exiſtimamus, ſi *Alexandrinum Mathematicum* noſtrum, ſub *Ptolemæo Lagi* filio celebrem fuiſſe, cum *Proclo* ſtatuamus. *Ptolemæus* autem, mortuo *Alexandro Magno*, primus Ægypti Rex, tranſlato in *Philadelphum* filium regno, obiit anno primo Olympiadis CXXIV. ante Chriſtum natum anno 282. notante PETAVIO *Ration. Temp. part.* 1. *lib.* III. *cap.* XV. Vel ſecundum *Fabricii* computum *loc. cit.* poſt quadraginta annorum imperium; animam egit anno 277. ante natum Salvatorem, Olympiade CXXIII½. Quocirca plus quam trecentis ante æram Chriſtianam annis, Ægypto imperare coepit *Ptolemæus* primus, uti recte cenſet GREGORIUS. *in præfat. laud.* ſeu uti CLAVIUS *in proleg.* ſcribit, ante nativitatem Chriſti anno 319. imperare incepit *Ptolemæus Lagi.* Itaque *Euclides Geometra* inter annum 319. & 282. ante nativitatem Chriſti inclaruiſſe habendus eſt; eoque temporis intervallo, Alexandriæ famoſam ſuam Scholam Mathematicam erexiſſe, ac publice Geometriam diſcipulos docuiſſe; cum autore TACQUET *loc.* ſupra *cit.* vitam poſuit *Euclides* noſter anno 284. ante Chriſtum; ideo circa annum 300. ante Chriſtum natum imprimis floruit.

§. IV.

Digitized by Google

§. IV. Cum vero iis temporibus imprimis celebris erat *Platonis* Schola; Platonicorum usus est institutionibus, in quorum doctrina ita versatus est, ut summam facile sibi comparaverit laudem. Testatur enim CLAVIUS *in proleg. in Euclid.* Ipsum summa laude in Academicorum disciplina fuiſſe verſatum, [illegible] cum in Academia *Platonis*, præceptoris [illegible], Matheſeos ſtudium tunc maxime [illegible]; *Euclides*, poſtquam Platonicorum dogmatibus [illegible] inſtructus fuerat, totum [illegible] ad disciplinas Mathematicas tranſtulit, in quibus [illegible] eruditus eſt, quotidiana [illegible] *Platonis* diſcipulorum conſuetudine, ut [illegible] admirabiles, ac ſempiterna ævi [illegible] dignisſimos, in iis fecerit. Vid. [illegible]MANDINUS *in Euclid. Elem. proleg.* [illegible] quibus imbutus erat, prin[illegible] Academicorum inſtitutionibus ſibi [illegible]; poſtea ſervavit. Etenim Plato[illegible] Doctrinam ſectatus eſt. Quoniam [illegible] Sectæ Platonicæ Patroni, cuncta cor[illegible] mundana, præcipue ad quinque corpo[illegible] regularia, Pyramidem, ſive Tetraëdron, [illegible], ſive Hexaëdron, Octaëdron, Do[illegible], & Icoſaëdron, reducebant: [illegible] propterea corpora Platonica ſæpe [illegible]. Cum omnia ex quatuor Elementis [illegible] credebant, Tetraëdron Igni, prop[illegible] acumine ignis ſimilitudinem; [illegible] Aëri, qui ſicut aër igni, ita octaë[illegible] levitate formaque proximum [illegible] Icoſaëdron Aquæ ob mobilitatem, qua hæc

Digitized by Google

hæc figura huic Elemento ſimilis eſt; Hexaëdron Terræ, ob ſtabilitatem ejus aſſignarunt; & Dodecaëdron denique Coelo compararunt, quod, ſicut coelum duodecim ſignis Zodiaci cingitur, ita Dodecaëdron duodecim habet baſes; item ſicut Coelum ſuo ambitu reliqua in ſe comprehendit Elementa, ita Dodecaëdron inter quinque iſta corpora regularia, quæ in eandem includi poſſunt Sphæram omnium eſt maximum, & quod reliqua omnium aptiſſime circumſcribit. Videatur SAMUEL REYHERUS *in Diſſert. de Euclide cap.* 3. §. 4. & MARSILIUS FICINUS *in Compendio in Platonis Timæum cap.* 40. Hinc etiam *Euclides* noſter *Geometra*, totam ſuam Elementarem inſtitutionem, ad hæc quinque corpora regularia reduxit. Etenim in ſuis Elementis, quinque hæc corpora Platonica, ſub Geometrici examinis incudem, vocare ſtuduit: & hunc ſibi propoſuiſſe, primarium Scopum, in Elementis ſuis condendis videtur. Scilicet ut omni niſu examinaret quinque iſta corpora Platonica, ac ut eorum rigidam daret apodeixin; propterea duodecim priores adornavit libros. Qua de re ita loquitur KEPLERUS, omnes omnino Propoſitiones, omnium librorum; exceptis iis, quæ ad numerum perfectum ducunt; ad mundanarum figurarum conſtitutionem referuntur: cum Elementorum inſtitutionis finem ſtatuerit, τῶν κοσμικῶν σχημάτων habitudinem & compoſitionem. confer. GREGORIUS *in Præfat. in Euclid.* Ex quibus haud obſcure quilibet facile derivare poteſt;

Eucli-

Euclidem Geometram Sectæ Platonicæ addictum fuiſſe; ejusdemque Inſtitutionis & Doctrinæ, quod ad Rerum Naturalium Scientiam, ſectatorem haud contemnendum fuiſſe. Quapropter PROCLUS *in comm. in Euclid.* Eum Platonicum fuiſſe diſertis teſtatur verbis. Non igitur conjectura quadam hic nobis opus eſt, ut ſciamus, qualisnam fuerit *Euclides Geometra.* Eum enim fuiſſe Philoſophum Platonicum, qui rerum naturalium Scientiæ, ſecundum Præceptoris ſui præcepta, inprimis operam navavit, ac Geometricæ ſcientiæ ſtudioſiſſimum; in qua ſumma laude excelluit, omnibus, ex ante dictis, clarum eſſe exiſtimo. Ad hanc autem in Scientiis Naturalibus, & Geometricis peritiam, porro ei acceſſerant plura animi bona; quibus Natura Eum bearat. Erat enim Vir ſuaviſſimi ingenii, & contentionis minime amans. Nam de eo ſcribit PAPPUS *collect. Mathem. lib.* 7. *pag. m.* 240. *Quod Euclides, qui Elementa tradidit, ac qui Alexandriæ diſcipulis operam dedit, fuerit vir mitiſſimus, & benigniſſimus erga omnes, nullo modo infenſus, ſed accuratus, non arrogans.*

§. V. Præter hunc à nobis deſcriptum *Euclidem*, in Schola Platonica, Rerum Naturalium doctrinis, ſecundum Præceptoris mentem, cum inſtitutum optime, tum etiam perfectè planeque eruditum; ac præterea rerum mathematicarum ſcientia inſtructum, & doctrina excultum: Scriptores tam Veteres, quam Recentiores, etiam

** men-

mentionem faciunt *Euclidis:* qui eo nomine celebratur, quod Philoſophus fuerit Socraticus; & Auditor ipſius *Socratis* deſcribitur. Eum ajunt, *Megaris*, Græciæ oppido, ortum fuiſſe; ibidemque habitaſſe, & Scholam habuiſſe publicam, ac idcirco *Euclidem Megarenſem* appellari. Etenim de eo, recitato prius Athenienſium decreto, ita ſcribit GELLIUS *noct. attic. lib.* 6. *cap.* 10. *Tum Euclides, qui indidem megaris erat, quique ante id decretum, & eſſe Athenis, & Audire Socratem conſueverat; poſtquam id decretum ſanxerunt, ſub noctem, quum adveſperaſceret, tunica longa muliebri indutus, & pallio verſicolore amictus, & caput rica velatus, è domo ſua Megaris ad Socratem commeabat; ut vel noctis aliquo tempore conſiliorum, ſermonumque ejus fieret particeps.* Præterea DIOG. LAERT. qui ejus vitam deſcribit, *lib.* II. *ſegm.* 106. ſimiliter aſſerit *Euclidem* hunc *Socraticum* Megarenſem eſſe, eo quod *Megaris* natus ac verſatus ſit; Sectamque condidit, ab ipſo Autore, Megaricam dictam. Porro STRABO *Geogr. lib.* 9. *pag.* 602. Eundem *Megaris* oriundum ſtatuit, quum de eo ſcribit, *habuit aliquando*, urbs ſcilicet Megarenſium, *Scholam Philoſophorum, qui Megarici dicebantur, ſucceſſores Euclidis Socratici, Patria Megarenſis.* Denique, ut alios omittam, CICERO *Academ. Quæſt. lib.* 2. *cap.* 42. teſtatur illum *Euclidem*, qui *Socratis* diſcipulus fuit, *Megaram* Patriam habuiſſe, ait enim; *Poſt Euclides, Socratis diſcipulus, Megareus* &c. Quæ itaque teſtimonia iſtorum Scriptorum conſona, Patriam

triam *Euclidis Socratici* Megaras fuiſſe abunde ſatis comprobant. Licet alii ſedem ejus natalem in *ſicilia* quærant; ac ejus origines ex urbe Gela repetant, quum Eum Geloum faciunt. vid. DIOG. LAERT. *loc. cit.*

§. VI. In hujus vero *Euclidis Socratici* Ætatem, quando inclaruit, inquirendum jam nobis venit; ad quam determinandam multum nos juvant GELLII verba, paragrapho præcedenti 5ta. adducta: in quibus inter cætera ait, Eum *Athenas* ire, & *Socratem* audire fuiſſe ſolitum. Quibus addi merentur ea, quæ ſcribit DIOG. LAERT. *in Vita Euclidis lib.* II. *ſegm.* 106. *Nam*, inquit, *poſt Socratis Mortem, veniſſe Platonem, ac reliquos Philoſophos, metu Atrocitatis Tyrannorum compulſos, ad hunc Euclidem Megarenſem*; à quo hoſpitio humaniſſime fuere excepti; notante STANLEJO *in Hiſtor. Philoſ. in Vita Euclid.* Ex quibus allatis verbis attendenti manifeſto apparere poſſe puto; *Euclidem Socraticum*, poſt mortem *Socratis* Præceptoris ſui, vixiſſe; ac *Platonis* tempore *Socratis* diſcipuli nomine celebratum fuiſſe; cum vero eodem Præceptore *Socrate* uſi ſunt; *Platoni* notum fuiſſe. Unde *Socraticus* noſter *Euclides Platonis* coætaneus ponitur. *Socrates* autem teſte DIOG. LAERT. *lib.* II. *ſeg.* 44. mortuus eſt anno primo Olympiadis XCV. poſtquam ſeptuaginta annos exegiſſet. Ac *Plato* annos natus duo de triginta adiit *Euclidem Megarenſem*, autore FABRICIO *Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* I. §. I. Verum

 Eu-

Euclides Megarenſis, ante decretum, de quo loquitur GELLIUS *loco* §. 5. *cit.* quo caverant Athenienſes, qui *Megaris* civis eſſet, ſi intuliſſe *Athenas* pedem deprehenſus eſſet, ut ea res ei homini capitalis eſſet; ante hoc decretum *Euclides Megarenſis Athenis* eſſe, & *Socratem* audire conſueverat. Quapropter ſuſpicor clarum ac celebrem tum præ cæteris fuiſſe *Socraticum Euclidem*; cum *Plato* ad Eum *Megaras* venit; ac ni fallor Scholam ſuam jam Megaræ erexiſſe, cum una cum *Platone* reliqui Philoſophi ad Eum confugiunt. Hinc videtur ſequi *Euclidem Megarenſem* quidem dicendum eſſe *Platonis* coætaneum, quod *Platonis* tempore adhuc in vivis eſſet; Verum eum *Platone* ſeniorem fuiſſe; Quocirca imprimis circa annum 400. ante Chriſtum natum, *Euclidem Socraticum* floruiſſe ponendum eſt.

§. VII. Cognitis jam Patria, & Ætate hujus *Euclidis Megarenſis*; porro ejus Doctrinas, quibus excelluit, & mores, quibus à natura donatus fuit, inveſtigare utile nobis futurum eſſe exiſtimamus. Super his rebus DIOG. LAERTIUM rogantibus, in ſuis ſcriptis reſpondet, *lib.* II. *ſegm.* 106. Eum litigioſis diſputationibus cum primis addictum fuiſſe; ac ea propter in *Socratis* reprehenſionem incurriſſe: qui LAERTIO teſte *lib.* II. *ſegm.* 30. *O*, inquit, *Euclide*, *ſophiſtis quidem uti poteris*, *hominibus non poteris.* Ideo ab ejus contentioſa indole Secta ejus *Eriſtica* dicebatur; quapropter LAERT. *lib.* II. *ſegm.* 24.

Digitized by Google

24. in ejus Scholam ita invehit, quod ait, non σχολὴν *Scholam*, ſed χολὴν *Merum fel* eam eſſe. Quo videntur reſpicere ea, quibus *Timon* illum una cum cæteris *Socraticis* mordet, quæ LAERT. *lib.* II. *ſegm.* 107. refert.

Non ego horum nugatorum curam gero, nec alterius
Cujusquam; non Phædonis, quisquis ille ſit, nec litigioſi
Euclidis, qui Megarenſibus contentionis rabiem invexit.

In argumentationibus non aſſumtionibus, ſed concluſionibus utebatur. Diſputationes ex ſimilibus inſtitutas penitus tollebat. Unum eſſe bonum ajebat, cujus diverſa ſunt tantum nomina, *prudentia* ſcilicet, *Dei*, *mentis*, & cætera. Conferatur STANLEJUS. *in Hiſtor. Philoſ. in vita Euclidis.* Quæ è *Laërtio* allata, hujus *Euclidis* diſciplinas, quibus maxime ſe exercuit; ac quas publice tradidit, ſatis manifeſto declarant; quum ex iis tantum mihi colligere poſſe videor; Eum imprimis *Dialecticam* profeſſum fuiſſe; ac diſcipulos ſuos in diſputandi arte exercuiſſe; totumque ſuum ſtudium Dialecticæ peritiæ impendiſſe; ac ejus rei inprimis gnarum fuiſſe. Quapropter, ni fallor, apud SUIDAM, *in Lexico ad vocabulum Euclides*, titulo *Philoſophi Megarenſis* tantum notatur; neque apud ullum Autorem reperio eum Geometriæ ſtudium vel primis labiis

 guſtaſſe

guſtaſſe, vel ejus ſcientia imbutum fuiſſe. Immo SUIDAM Eum ſolummodo *Philoſophi* nomine appellaſſe, non absque ratione factum eſſe conjicio; quia nempe apud Veteres Scriptores Græcos, è quibus *Suidas* ſua collegit, tantummodo *Philoſophi* nomine occurrit. Abſit itaque ut Eum *Geometræ* nomine ornaremus, quum plus arti ſophiſticæ, quæ à quolibet Geometra quam longiſſime remota eſſe debet, quam ſevero rerum examini tribuiſſe viſus ſit. Porro *Laërtii* verba hujus *Euclidis Philoſophi* indolem & mores haud obſcure cognoſcere faciunt; vehementem ſcilicet Eum ac litigioſum fuiſſe; inſuper diſputandi eum per cupidum adeo fuiſſe, ut Megarenſibus contentionis rabiem invexerit.

§. VIII. Quod ſi ea, quæ de utroque *Euclide* reperire potui, hucusque enarrata, introſpiciamus, illi, qui *Euclidem Geometram*, *Megaris* ortum fuiſſe ſentiunt; ac propterea *Megarenſem* vocant; *Geometram* noſtrum, cum *Philoſopho* illo *Megarico*, ſeu *Socratico* confundere mihi videntur. In his vero me parum, aut omnino nihil à recta via aberrare, ſi fontem ac originem, unde iſtam ſuam ſententiam deduxere, ſciſcitemur; illa me perſuadere videntur. Nam cum *Euclidem Geometram Platonis* tempore floruiſſe ſtatuunt, & *Euclides* ille qui ad *Platonis* tempora refertur; ac propterea ab illis *Platonis* æqualis habetur, fuit *Philoſophus Socraticus*, *Megaris* natus, ac educatus, diſci-

diſcipulosque ibidem inſtituens; ſicuti §. 5. è Veterum monumentis apparuit; ac proin cujus Patria erat urbs illa *Megara*, vel *Megara* dicta; inde ni fallor, quia haud rite à ſe invicem ambos diſtinguunt *Euclides*, in eam opinionem, affirmandi *Euclidem Geometram Megareum* eſſe, adducti ſunt. Fundamentum itaque hujus conjecturæ in eo præcipue ſitum eſt; quod *Euclidis Geometræ Ætatem* in *Platonis* tempora incidiſſe opinantur. Verum obſervantibus VOSSIO *de Scient. Math. cap.* 15. §. 1. CLAVIO *in Proleg. in Euclid.* & DECHALES *in tract. Prooem. de ortu & progreſſu Matheſ. pag.* 8. ad hunc errorem circa Ætatem *Euclidis* noſtri committendum, omnibus præivit VALERIUS MAXIMUS *lib.* 8. *cap.* 12. ſcribens. *Platonis quoque eruditiſſimum pectus hæc cogitatio attigit; qui conductores Sacræ aræ de modo & forma ejus ſecum ſermonem conferre conatos, ad* EUCLIDEM GEOMETRAM *ire juſſit.* Ex quibus itaque collegere, *Euclidem Geometram* iisdem Temporibus cum *Platone* inclaruiſſe. Sed notant Viri docti ad hunc Locum, mendum eſſe in iis *Valerii* verbis: quippe obſervat PERIZONIUS quod *Mitallerius*, emendavit EUDOXUM: quoniam à PLUTARCHO appellatur *Eudoxus Gnidius* ad quem *Plato* eos oblegavit. Idem laudatur in nobis ad GELLII *lib.* 6. *cap.* 10. dicitur enim ibidem; *Meminit quidem Valerius Maximus loc. cit. Platonem quosdam ad Euclidem Geometram miſiſſe, ſed mendum ibidem latet; & recte Mitallerius in Editione ſua re-*

ſtituit EUDOXUM *Geometram. Ita legendum oſtendit Plutarchus de Deo Socratis, qui in Geometrica quæſtione Eudoxi Cnidii Platonis diſcipuli meminit.* Idem ſentit MENAGIUS ad DIOG. LAERT. *lib.* II. *ſegm.* 106. ſcribens, illa lectio *Mitalleri* temporum rationi optime congruit. Vixit enim *Eudoxus Cnidius* nobilis ille Geometra iisdem temporibus, quibus *Plato*, cujus etiam auditor fuit; ſicuti ex catalogo Mathematicorum, à *Proclo* ornato §. 1. colligere eſt. Quare *Valerius de vero nomine Geometræ parum ſollicitus fuerit, & Celeberrimi Geometræ nomen haud ſatis circumſpecte arripuerit.* Monente TORRENIO ad hunc locum. Obſervat porro VOSSIUS *loc. cit.* Delios ad *Euclidem Geometram* miſſos, nequidem de *Socratico* verum eſſe; ſed quod *Plato* rejecerit illud Problema ad diſcipulos ſuos. Denique PETRUS RAMUS *in Schola Mathem. lib.* I. *pag. m.* 22. 23. exiſtimat, quod hac in re major fides ſit habenda *Eratoſtheni*, qui *Euclidem Geometram* proxime ſecutus eſt; quam *Valerio*: ERATOSTHENES autem in Epiſtola quadam ad Regem *Ptolemæum*, inter cætera hæc ſcribit verba. *Aliquando vero poſt ajunt Delios graſſante morbo, ſecundum Oraculum, duplicare quandam Aram juſſos, incidiſſe in eandem anxietatem, tumque implorando Platonicos in Academia Geometras oraviſſe, ut quæſtionem diſſolverent. &c.* Quapropter hinc etiam liquido attendenti cuilibet conſtare poteſt, omnino erraſſe in nominis deſcriptione *Valerium*. Nam nec quidquam duplicati Cubi ad

Eu-

Euclidem Geometram ab Autoribus refertur; nec *Euclides* in Elementis quidquam nominatim de duplicando Cubo propoſuit. Cum itaque hæc omnia æqua lance ponderentur, nullus inficias ire poteſt; quin ille locus *Valerii* vitio laboret; nomenque *Euclidis Geometræ* ibidem delendum ſit. Verum deſtructo VALERII citato loco, corruere eorum ſententiam, qui *Euclidis Geometræ* Ætatem ad *Platonis* tempora referunt, meo judicio videtur: cum præter *Valerium* è Veteribus teſtem nullum alium pro hac opinione habent. Sed quia ex eadem conjectura manifeſto ſatis orta eſt; ea cogitatio de Patria *Euclidis Geometræ*, qua *Megaram* fuiſſe ſtatuitur; cum binos hos inter ſe confundunt *Euclides*; idcirco *Euclidem Geometram*, *Megarenſem* dicere non auderem.

§. IX. Non autem inter ſe confundendos eſſe binos hos *Euclides*, ſed à ſe invicem omnino diſtinguendos eſſe, multa ſunt quæ id ſuadent. In utroque enim *Euclide* tot characteres differentes licet reperire, qui abunde alterum ab altero diverſum fuiſſe, ſine ullo dubio palam oſtendunt. Etenim tam *Geometræ Euclidis*, quam *Philoſophi Socratici* Patriam, in qua quilibet floruit, Domicilium habuit, ac Publice Scientias docuit; ſi nobis ob oculos ponamus; ea quæ §. 2. 5. & 8. adduximus, ut utriusque eandem fuiſſe putaremus, non permittunt. Quum *Euclides*, qui Geometriam exercuit ac publice eam profeſſus fuit, *Alexandria*

Scholam ſuam habuit, ibidemque vitam degit. Alter vero *Euclides*, qui *Socratis* Auditor fuit, ac Philoſophiam publice docuit, *Megaræ* diſcipulos inſtituit, & erudivit, patriosque eo in oppido habuit Lares. Præterea magis eos à ſe invicem diſtinguere facit utriusque Ætas diverſa. Quippe *Socraticus* ille *Philoſophus*, Tempore *Socratis* jam erat notus. §. 6. ejusque Auditor fuit, ac *Megaræ* eo tempore, Philoſophiæ partem eam, quæ Dialectica vocatur, inſtituit. *Geometra* autem *Euclides* ſub *Ptolemæo Lagi* filio demum clarus fuit, §. 3. eoque tempore Geometriam docuit. A morte vero *Socratis* usque ad *Ptolemæum* primum elapſi ſunt anni xcv. monente STANLEJO *in vita Euclidis.* Quare ad minimum xc. anni effluxere, inter *Euclidem Socraticum*, & *Euclidem Geometram*; uti cenſet VOSSIUS *de Scient. Mathem. loc. cit.* Multo itaque junior fuit *Euclides Geometra*, *quam Megarenſis Euclides.* Confer. CLAVIUS *in Proleg. in Euclid.* GREGORIUS *in præfat.* COMMANDINUS *in Euclid. Elem. Proleg.* & multi alii. Porro inter illos diſcrimen licet obſervare, ſi Scholas, in quibus quilibet eruditus fuit, contemplemur. Prodiit enim *Megarenſis Euclides* è *Socratis* Schola, *Mathematicus* vero *Euclides* è Platonica. Augetur illud diſcrimen inter ambos illos *Euclides*, ſi diverſa ſtudiorum genera, in quibus ſe primo exercuere; ſi diverſas doctrinarum ſpecies, quas dein publice profeſſi ſunt, cogitemus. Fuit enim *Euclides Socraticus Parmenidis*

nidis librorum valde ſtudioſus, Autore LAERTIO in ejus vita, ac in diſputandi arte imprimus verſatus eſt; *Alexandrinus* autem *Euclides*, *Platonis* ac Platonicorum de Rerum Naturalium ſcientia, ſententias & rationes inveſtigavit, easque omni niſu ſtuduit, iisque percipiendis & examinandis totus incubuit; dein Geometriam adiit, eamque maxima cum laude excoluit. Docuit *Megarenſis Euclides* artem Dialecticam, in eaque ſcientia ſuos præcipue erudivit diſcipulos; Informavit *Alexandrinus Euclides* Quantorum contemplationes, & in iis ſpeculandis & rimandis Auditores ſuos occupatos tenuit. Nec parum exaggerabunt differentiam inter ambos hos homines ſtatuendam, monumenta, quibus famam ſuam longam effecere. Celebratur *Euclides Megarenſis*, quod Dialogos ſex compoſuerit, ac ſcriptis reliquerit, qui recenſentur à DIOG. LAERT. *in ejus vita*, ac ſunt ſequentes, *Lamprias*, *Aeſchines*, *Phoenix*, vel ut apud *Suidam*, *Phoenices*, *Crito*, *Alcibiades*, *Eroticus*. Laudatur *Alexandrinus Euclides*, quod ſcripta ad rem Mathematicam omnia ſpectantia compoſuerit, litterisque mandaverit. Diſtinguuntur ulterius à ſe invicem bini hi Autores, quatenus *Megarenſis* Philoſophi tantum nomine occurrit, *Alexandrinus* autem, Geometra ubique audit. Tandem mores quibus uterque donatus erat, facile inter ambos notabilem efficient diſtinctionem. Sicuti enim natu major *Euclides* vehemens ac litigioſus fuit, ſic minor natu, *Geometra* nempe noſter

ſter ſuaviſſimi ingenii Vir fuit, ab omni contentione abhorrens. Quod ſi itaque ea, quæ in utroque obſervavimus *Euclide*, inter ſe comparemus, aſſerere neminem audere ſuſpicor, ambos illos, qui *Euclidis* nomine apud prædictos Autores veniunt, pro uno eodemque habendos eſſe; contra diſtinctas omnino fuiſſe perſonas, neutiquam inter ſe confundendas; affirmare omnes optimo jure teneri. Conſentiunt GREGORIUS *in præfat.* SAVILIUS. *in prælect. in Euclid.* CLAVIUS *in proleg.* COMMANDINUS *in proleg.* & VOSSIUS *loc. cit.* multique alii.

§. X. Præter jam dictos binos *Euclides*, *Philoſophum* nempe, & *Geometram*, alii apud Scriptores leguntur, qui nomine *Euclidis* celebrantur: quos ob nominis convenientiam hic brevibus recenſere à propoſito noſtro non alienum foret. Quorum primus eſt *Euclides Archon* qui Athenis fuit anno 2do Olympiadis LXXXVII. Secundus fuit itidem *Euclides Archon*, ſub quo triginta Tyranni expulſi, ille vixit anno 2do Olympiadis XCIV. Tertius *Euclides Athenienſis*, ſed forte non diverſus à prioribus. Quartus fuit *Euclides Vates*, *Xenophonti* amicus. Quintus *Euclides Lapicida*, cujus mentio in *Platonis* Teſtamento exſtat. Sextus fuit *Euclides* Frater *Cleomedis*, Lacedæmoniorum Regis. Septimus vocatur *Euclides Pacatianus*, cujus antidotum refertur à *Galeno* in antidotis. Octavus eſt *Euclides Platonicus*. Nonus fuit *Euclides Maximi Byz.* filius. Decimus appellatur

tur *Euclides Paraſitus*, *Smicrini* filius, cognomento σεῦτλον. Undecimus fuit *Euclides Laco*. Duodecimus fuit *Euclides Rhetor*, cujus meminit STRABO *Geogr. lib.* 14. *pag.* 969. Confer. FABRICIUS *in Bibliotheca Græc. lib.* 3. *cap.* 14. §. 1. *in notis.* & STANLEJUS *in Vita Euclidis Megarenſis*

§. XII. Sed miſſis reliquis omnibus, de *Euclide Geometra* tantum ſcribere nobis animus eſt: cujus ſcripta, quibus ſui nobis commendaverit memoriam, recenſere ordinis & inſtituti ratio poſtulare videtur. Ea vero GREGORIUS *in præfat. in Euclid.* partim è *Pappo Alexandrino*, *lib.* 7. *collect. Mathem.* Partim è *Proclo lib.* 2. *Comment. in Euclid.* collegit: eaque porro recenſentur à DECHALES *in tractatu de Ortu & progreſſu Matheſ.* CLAVIO *in Proleg. in Euclid.* FABRICIO *in Biblioth. Græc. lib.* 3. *cap.* 14. VOSSIO *de Scientiis Mathem.* multis aliis: ac ſequentia enumerantur. Inter *Euclidis Geometræ* ſcripta, quæ partim periere, partim ſuperſunt; *primo* numerantur *Libri tres Poriſmatum*; Verum hi magno rei Geometricæ, præſertim loci reſoluti, damno periere. Quædam tamen eorum apud *Pappum in lib.* 7. *Collect. Mathem.* ſuperſunt; reliqua autem hodie non exſtant. *Secundo* recenſentur libri duo *Locorum ad ſuperficiem*, ad Analyſim Geometricam pertinentes; hi etiam libri temporum injuria periere, præterquam quod *Pappus Alexandrinus* horum quatuor lemmata notavit. *Tertio* conſcripſit *Librum*

Falla-

Digitized by Google

Fallaciarum, neque hic hodie reperitur; in eo vero rationes falſa deprehendendi, & paralogismos arguendi oſtendit; quod ſcriptum, non ſine notabili rei Logicæ ac Mathematicæ jactura, perditum eſt. *Quarto* compoſuit quatuor libros *Conicorum*, quos *Apollonius Pergæus* explevit, eisque alios quatuor libros adjecit, qui hodie ſub *Apollonii* nomine leguntur. *Quinto* refert DECHALES *librum de ſphæra* ab Euclide ornatum, qui cum cæteris periit. Præter hos libros perditos alii ſunt, qui feliciori fato ab interitu ſervati ſunt: inter eos tamen varii reperiuntur, de quibus valde dubitatur an quidem ſint *Euclidis*. *Sexto* Euclidi tribuitur liber unicus *Datorum*, quæ ad analyſin Geometricam ſunt comparata; & ejus quaſi Elementa Veteribus Geometris familiaria. Inter alios hunc *Datorum* librum ſuccincte demonſtratum in lucem emiſit *Iſaacus Barrow*; Ac olim à *Claudio Hardy* cum *Marini Philoſophi* Commentario Græcè emiſſus, ac Latinè verſus eſt, additis obſcurioribus locis Scholiis neceſſariis. vid. VOSSIUS *de Scient. Math. in addendis pag. m.* 433. Idque felicius præſtitit *Hardy*, quam antea *Zambertus*, qui itidem hunc *Datorum* librum Latinè vertit. *Septimo* Ei adſcribuntur Tractatus duo Muſici, nempe *Introductio Harmonica* & *Sectio Canonis*: dubitat autem GREGORIUS an uterque ab *Euclide* ſit ſcriptus; qui hodie eo nomine Euclidi ab aliis adjudicantur, nam MEIBOMIUS eos tractatus muſicos *Euclidi* tribuit; cui aſſentitur FABRICIUS *loc. cit.*

Digitized by Google

cit. MEIBOMIUS omnium optime in eos Commentatus eſt; eosque Volumini ſuo *Veterum Muſicorum* inſeruit. *Octavo* inter ejus Scripta occurrit liber unicus *Phænomenorum*; in quo ſolo Coeleſtia, ſive Aſtronomiæ principia attingit. Hunc VOSSIUS *loc. cit.* à *Bartholomeo Zamberto* cum reliquis quibusdam Opuſculis Latinè verſum fuiſſe, refert. Græcè & Latinè ſine Demonſtrationibus inter cætera *Euclidis* Scripta *Phænomena* edidit *Conradus Daſypodius. Nono* ſcripto reliquit *Euclides Opticam*, & *Catoptricam*; verum GREGORIUS & SAVILIUS multa ſe ſuadere dicunt, ad ſuſpicandum opus illud, quod hodie *Optica* & *Catoptrica Euclidis* vocatur, ſpurium eſſe; vel temporis lapſu prorſus corruptum. Interpretatus eſt *Opticam* & *Catoptricam Joannes Pena*; tum Hetruſco idiomate, ex interpretatione *Ignatii Dantis* lucem vidit hic libellus; ſed Autore *Blancano*, *Ignatii* expoſitio mutila eſt & manca. *Decimo* additur Scriptis Euclidis editis liber *de Diviſionibus*, qui latine tantum exſtat: Multi cenſent librum *Euclidis de Diviſionibus* eundem eſſe libellum Arabica Lingua ſcriptum de ſuperficierum diviſionibus, *Machometo Bagdedino* vulgo adſcriptum; qui cura & ſtudio *Joannis Dee* Londinenſis, & *Fredrici Commandini* latine verſus lucem vidit. *Savilius* autem & *Gregorius* illum libellum non *Euclidis* eſſe opinantur; conſtat tamen *Euclidem de Diviſionibus* librum ſcripſiſſe. *Undecimo* his adjungit *Gregorius*, Fragmentum, quod in *Zamberti* editione latina Euclidi addicitur; in

in quo agitur de *Levi* & *Ponderoſo*; ſed pro ſpurio id habet SAVILIUS *in prælect. in Euclid.* *Duodecimo* Scripſit *Euclides* abſolutum opus *Elementorum*, cum Sole & Luna duraturum; quod plusquam 2000. annos magnam æſtimationem obtinuit. De hujus editionibus & commentariis in ſequentibus in ſpecie §. 32. agere conſtituimus. Super his *Euclidis* Scriptis omnino legi merentur quæ de iis notarunt GREGORIUS *in præfat.* & FABRICIUS *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* 14. §. XI-XVI. *pag.* 377-381.

§. XII. Ex his vero omnibus Scriptis enumeratis, quæ *Euclidis* nomine veniunt, *Elementorum* librum elegimus; de quo pauca differemus, cætera ſilentio prætereuntes. Quippe ſunt *Elementa Euclidis*, quæ præ re-reliquis præcipue in omnium verſantur manibus; quæque à cunctis Geometriæ ſtudioſis nocte dieque tractentur. Sunt Elementa tantum Planorum, & Solidorum, quæ in hac editione occurrunt; de iis itaque permagni noſtra intereſt ſcire, quid Autores ſentiunt. *Euclidem Geometram Elementorum* opus conſtruxiſſe, inter omnes, tam Antiquiores, quam Recentiores convenit Autores. Et quamvis ante Eum à diverſis Elementa ſint compoſita Geometrica, ac ſcriptis conſignata; ſicuti ex *Procli* & aliorum teſtimoniis conſtat; cum multi ante Eum inclaruere Viri, de rebus Geometricis optime meriti, non ſolum in Ægypto, ſed etiam in Græcia, qui ſua ſuper Mathematica diſci-

diſciplina cogitata & inventa litteris notarunt: tamen VOSSIO teſte *de Scient. Math. cap.* 14. *Euclidis Elementa* ſunt opus vetuſtiſſimum quod in Geometria habemus; cum reliquorum præclarorum Geometrarum opera, temporis injuria periere. Præterea opus, quod *Elementa* inſcripſit, omnium Græcorum abſolutiſſimum eſt corpus principiorum Geometriæ; non obſtantibus aliis Geometriæ Elementis, à diverſis compoſitis. Quippe in Græcis primus ille fuit, qui omnia fundamenta, ad Geometriæ Scientiam ducentia, in *Elementari* ſuo corpore collegit; ac collecta digeſſit. Hac de cauſa depingebatur *Euclides* digitis demetiens; unde SIDONIUS APOLLINARIS *lib.* 9. *Epiſt.* 9. ait, *per Gymnaſia pingi Euclidem, propter menſurarum ſpatia, digitis laxatis.* In his autem *Elementaribus* inſtitutionibus, adornandis, non omnium Problematum, & Theorematum unicus Inventor & Autor ſtatuendus eſt *Euclides*; verum aliorum Autorum tum inventis, tum ſcriptis, in ſuis Elementis componendis, uſus eſt; quorum ea, quæ invenere, vel in ordinem redegit; vel quæ non ſatis valide demonſtrata erant, firmiſſimis munivit demonſtrationibus. Quapropter *Elementa Euclidea*, quo ad maximam partem, originem ſuam traxere, ex Scriptis Geometrarum, vel ante *Euclidis* tempora, vel iisdem temporibus inclareſcentium; quæ conſuluit. Ita ut hoc *corpus Elementorum* ſit compoſitum, partim ex Problematibus, & Theorematibus ab aliis excogitatis; quæ ex

Digitized by Google

iis ſelegit, utpote ad propoſitum ſuum aſſequendum ducentia; ac quæ in convenientem ordinem redegit; vel ſi firmæ deeſſent probationes, evidentibus Demonſtrationibus confirmavit; partim ex Propoſitionibus à ſe inventis, probationibus invictis, iis additis. Quæ tamen omnia in concinnum iſtum ordinem adduxit, quo hodie *Elementa Euclidea* ſunt ornata. Etenim PROCLUS *lib.* 2. *Comment. in Euclid.* nobis autor eſt, *Euclidem* multa in ſuis Elementis ab aliis inventa collegiſſe, multa *Eudoxi* ordinaſſe, multa *Theæteti* perfeciſſe; ea præterea quæ laxius à prioribus demonſtrata erant, firmiſſimis Apodeixibus, quæ nec coargui, nec convinci poſſunt, muniviſſe. Ea propter à *Proclo* aliisque Veteribus Scriptoribus κατ' ἐξοχὴν dictus eſt ϛοιχειωτὴς, Elementorum Conſtructor, & Demonſtrator ſcilicet, ac Geometra: conferantur RICCIOLUS *Chron. pars.* 2. GREGORIUS *in præfat.* COMMANDINUS. *proleg. in Euclid.* CLAVIUS *Proleg. in Euclid.* DECHALES, *loc. cit.* VOSSIUS *loc. cit.*

§. XIII. Quod vero *Euclidis Elementa* multum debeant aliorum cogitatis, ac inventa priſtinorum Geometrarum contineant, è quibus ſunt conflata; extra omnem dubitationis aleam ponunt Propoſitiones & Demonſtrationes, quæ in ipſis Elementis occurrunt: quarum Inventores paſſim apud Veteres nominantur, quibus etiam Inventionis gloria tribuitur. Etenim celebratur THA-

Digitized by Google

THALES MILESIUS, qui primus nomine Sapientis eſt appellatus, Eum inveniſſe Iſoſcelium Triangulorum angulos ad baſin eſſe æquales: quæ eſt PROPOSITIO 5. ELEMENTI. I. Eandem propoſitionem univerſaliorem reddidit GEMINUS Geometra. Laudatur itidem OENOPIDES CHIUS, ob inventum illud præclare, perpendicularem nempe ad datam lineam ex puncto extra eam dato ducere; illaque eſt PROPOSITIO. 12. ELEMENTI. I. Memoratur, æqualitatem angulorum ad verticem oppoſitorum THALETEM MILESIUM detexiſſe; quam PROPOSITIONEM *Euclides* 15. ELEMENTI. I. fecit. Laus debetur EUPHORBO PHRYGI, quod modum, cujuslibet Trianguli ex tribus lineis componendi, invenerit; eaque eſt in ordine Euclideo 22. PROPOSITIO ELEMENTI. I. Quæ hanc proxime ſequitur 27. PROPOSITIO citati Elementi, inventis OENOPIDIS CHII debetur; cum Geometra ille demonſtravit ad datum punctum lineæ propoſitæ, angulo dato, æqualem angulum rectilineum conſtituere. *Dechales* autem exiſtimat, Eum non inveniſſe ipſam Propoſitionem, ſed Demonſtrationem aliquam reperiſſe. Inter THALETIS MILESII inventa Geometrica, numeratur porro æqualitas omnimoda Triangulorum, unum latus, & duos angulos ad invicem æquales habentium; quæ eſt apud *Euclidem* PROPOSITIO 26. ELEMENTI. I. Præterea, nullus eſt, qui vel primis, ut ajunt, labiis, Geometricum guſtavit ſtudium,

vel parum ſe in eo exercuit, quin PYTHAGORÆ in Geometria merita, propter inventa ejus utiliſſima, quæ inter *Euclidis Elementa* reperiuntur, extolli admodum animadverterit. Ille enim Autor eſt, Trianguli cujuscunque rectilinei tres angulos ſimul ſumtos duobus rectis æquales eſſe; quæ eſt 32. PROPOSITIO. ELEMENTI. I. Eidem huic præclaro Geometræ acceptas referimus PROPOSITIONES. 44, 47. ejusque converſam 48. ELEMENTI. I. Quarum 47. PROPOSITIO ſpeciali notatur denominatione, ſatis indicante, PYTHAGORAM primum Autorem habere; cum *Hecatombes Pythagorici* nomen gerit, ſub eoque titulo paſſim apud Scriptores celebratur. Hujus vero denominationis originem petunt ab oblatione Boum, à *Pythagora* Muſis facta, in gratiarum actionem, pro ejus Demonſtrationis inventione. Hæc eſt illa adeo celebris Propoſitio, quæ ob ingentem ſuam utilitatem, Inventoris ſui famam immortalem reddidit. Præter has recitatas Propoſitiones in Elemento primo *Euclidis* occurrentes, aliæ etiam ſunt, quæ in ſequentibus Euclideis Elementis reperiuntur. Nam THALETEM MILESIUM, angulum in ſemicirculo eſſe rectum, inveniſſe referunt; eaque eſt apud *Euclidem* PROPOSITIO 31. ELEMENTI. III. Porro inter ejusdem THALETIS inventa variæ Propoſitiones Elementi Quarti enumerantur. Etenim tribui Ei ſolent à multis Scriptoribus PROPOSITIONES. 2, 3, 4. & 5. ELEMENTI. IV. Qui-

Digitized by Google

Quibus addunt, Eum reperiſſe modum, Triangulum Æquilaterum in Circulo inſcribendi; cujus inventi lætitia elatus, Bovem Muſis immolaſſe dicitur. Porro ſunt qui ſtatuunt, QUINTUM EUCLIDIS ELEMENTUM ab EUDOXO CNIDIO eſſe compoſitum: quia EUDOXO à veteribus, de Proportionibus à ſe inventis, multa adſcribuntur. Certum enim eſt è teſtimoniis antiquorum, EUDOXUM de Proportionibus ſcripſiſſe. Si itaque omnia, quæ in ELEMENTO V. EUCLIDIS occurrunt, non ſunt EUDOXI, ſaltem pleraque ab ipſo profecta eſſe, *Proclus* clare ſatis teſtatur. Quare *Euclides* ea, quæ de Proportionibus habet, ex EUDOXI ſcriptis hauſiſſe, ſi non omnia, ſaltem plurima, cenſendus eſt; cum *Proclus* ait, *Euclidem* multa *Eudoxi* in ſuis Elementis in ordinem redegiſſe. Memoratur etiam THEÆTETUS, ob Demonſtrationem PROPOSITIONIS. 10. ELEMENTI. X. à ſe primo datam. Denique quæ de SOLIDIS, tribus ultimis ELEMENTIS, nempe XI, XII, XIII. demonſtravit *Euclides*, in iis THEÆTETUM, ARISTÆUM, aliosque ſecutum eſſe *Euclidem*, Autores referunt. Verum inde non derogatur, ejus laudi, quod aliorum placita conſuluerit; cum inconcuſſis fundamentis Autorum inventa, ordine nunquam corrigendo, ſuperſtruxerit. Videantur PROCLI *Comment. in Euclid.* DECHALES *in Tract. de ortu & Progreſſu Matheſ. pag.* 7. 8. & TAC-

QUET *in Hiſtorica narrat de ortu & progreſſu Matheſ.* aliique plures.

§. XIV. Hoc vero Elementorum corpus, ſecundum multorum Doctorum ſententiam, *Euclides* diviſit in *Tredecim* libros; licet vulgo à nonnullis *quindecim* enumerentur Elementorum libri: immo in quibusdam exemplaribus *Sedecim Euclidis* nomen ferunt. Verum obſervat VOSSIUS *de Scient. Math. cap.* xv. §. 3. etiamſi multi putent Elementa hæc conſtare libris xv. rem tamen non ita apertam eſſe de duobus poſtremis. Anſam dubitandi de XIV. & XV. Elementis, an quidem *Euclidis* ſint, præbet *Theonis* in *Euclidem* Commentarius. Etenim *Theon Alexandrinus*, *Euclidis* Elementorum valde ſtudioſus, qui ea ſuis expoſuit Diſcipulis, claruit *Theodoſio Magno* imperante, anno Chriſti 395. mortuo, uti refert VOSSIUS *loc. cit. cap.* 16. §. 9. Ille vero *Theon* in tredecim *Euclidis* priores libros, tantum commentatus eſt; uti *Campani* ſecundum *Theonis* expoſitionem, Editio Elementorum *Euclidis* teſtatur. Qua itaque expoſitione in hæc Elementa manifeſto indicaſſe videtur, Eum tredecim tantum agnoviſſe libros Elementorum ab Euclide conſcriptos. Præterea *Marinus Philoſophus*, *Procli Diadochi* diſcipulus, circa annum Chriſti 500. florens, in Protheoria ad Data Euclidis, Tredecim Elementorum libros Euclidi ſolummodo tribuit. Tot etiam libri reperiuntur, in Elementorum Euclidis verſione Arabica *Naſiridini Tu-*

ſini

Digitized by Google

ſini Perſa, quæ luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ anno 1594. ex Typographia Medicea. Sicuti multa alia ſunt exemplaria, uti *Rhodii*, *Richardi*, aliorumque, in quibus ultimi duo nempe XIV. & XV. non reperiuntur libri. Accedit quod ultima propoſitio Elementi XIII. veluti colophonem operi imponit. Conferatur FABRICIUS *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* 14. Sed porro obſervandum venit, Librum decimum quartum propriam habere præfationem, quam nec primum Euclidis Elementum habet; *non vano argumento* inquit GREGORIUS *in præfat. in Elem. Euclid. duos ultimos libros alterius eſſe quam Euclidis*. Conſentiente VOSSIO *de Scient. Math. cap.* XV. §. 3. & DECHALES *in Tract. de ortu & progreſ. Math. pag.* 8. 9. Ex quibus abunde videtur conſtare, Tredecim Elementorum libros, ab Euclide tantum fuiſſe compoſitos; binos reliquos ſcilicet XIV. & XV. alium agnoſcere Autorem. Hi vero poſteriores bini libri, à quamplurimis, Commentarii HYPSICLIS ALEXANDRINI habentur. Vixit *Hypſicles* circa Tempora *Ptolemæi Lathyri* (nempe toto ſeculo, vel paulo ulterius, ante natum Chriſtum.) *Iſidori* ſummi Mathematici diſcipulus. VOSSIUS *loc. cit. cap.* 54. §. 7. Ipſa præfatio quæ Elemento XIV. præmittitur, eſt prooemium *Hypſiclis Alexandrini* ad *Protarchum*: ex quo haud difficulter colligere eſt, illud neutiquam convenire *Euclidi*, at bene *Hypſicli Alexandrino*, de quo in iſto loquitur Prooemio. Ut cætera

tera taceam, quot verba, tot argumenta, Euclidem non eſſe ejus Autorem arguentia, reperiuntur. Etenim mentionem injicit ſcriptorum *Apollonii*; de comparatione Dodecaëdri, & Icoſaëdri, eidem ſphæræ inſcriptorum: id neutiquam de *Euclide*, qui ante *Apollonium* ſcriptis inclaruit, prædicari poteſt; ſed quidem de *Hypſicle* qui multo poſt vixit. Conferatur FABRICIUS *loc. cit.* Sicut etiam GEORGIUS VALLA, & BARTHOLOMÆUS ZAMBERTUS VENETUS, qui ſub *Hypſiclis Alexandrini* nomine, poſteriores duos Elementorum libros, latine verterunt. Eosdem ob *Hypſicle Alexandrino* compoſitos eſſe cenſent, SAVILIUS, GREGORIUS, CLAVIUS, DECHALES; locis jam jam citatis; & innumeri alii. Decimus Sextus Liber, qui in nonnullis codicibus, non tamen in omnibus, prioribus annectitur, nunquam *Euclidi* fuit adſcriptus; licet in ordine Elementorum in Clavii Editione Euclidis Elementis annumeretur; ſed ille eſt adjectus à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA; uti in fronte hujus libri à quolibet legere eſt. Ac ob materiæ convenientiam Elementis adjungitur, ſicuti duo præcedentes libri, de ſimili argumento, cum Elemento decimo tertio Euclidis tractantes, propterea à nonnullis cum Euclidis Elementis XIII. connectuntur, iisque adjunguntur.

§. XV. Tredecim hi Elementorum libri, reſpectu Doctrinarum, quas *Euclides* de Quan-

Digitized by Google

Quantitatibus in iis pertractavit, cum CLAVIO & GREGORIO commode *in quatuor* diſpeſci poſſunt *partes*: licet bipartita diviſio, in *Superficierum* & *Solidorum* contemplationem, ſufficiens eſſet; quia PROCLUS nobis Autor eſt, nullam peculiarem ſuis in Elementis, de Punctis & Lineis tractationem inſtituiſſe *Euclidem*. Verum Solidorum *Euclidis* ſpeculationes, de corporibus regularibus Sphæræ includendis, rite intelligi nequeunt, niſi præceſſerit notitia Linearum Commenſurabilium, & Incommenſurabilium; cum diametri ad latus proportio non ſemper rationalis eſt. Harum vero Linearum intelligentia, Numerorum ſcientiam præviam ultro efflagitat; ac cum corpora illa ſolida, baſibus planis, lateribus, & angulis planis continentur; cumque omne Solidum præſupponit Planum, ex quo Originem ducit, oportebat Doctrinam Planorum primo loco tradere: inde nata eſt Diviſio horum Elementorum in partes quatuor. *In prima parte*, *Plana* contemplatur; quorum Doctrinam Sex prioribus abſolvit libris: & quidem ita, ut Quatuor primis Elementis Plana abſolute ſpeculetur; ſequente vero Elemento Quinto Magnitudinum Proportiones in genere tractat; easque Figuris nonnullis Planis in Sexto Elemento applicat. *Secunda pars*, *Numerorum* affectiones exponit, quorum notitiam tribus ſequentibus libris, Scilicet Septimo, Octavo, & Nono comprehendit. *Tertia in parte*, *Summetriam*, ſive de Lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus

 Scien-

Digitized by Google

Scientiam docet, hancque unico, Decimo nempe libro complexus eſt. *Quarta* denique *in parte*, *Stereometriam*, ſeu ſolidorum doctrinam examini ſubjicit, eorumque contemplationem tribus ultimis libris, Undecimo, Duodecimo, & Decimo tertio, proponit ac demonſtrat. Quibus peractis cum ultima propoſitione Libri Decimi tertii Elementa ſua claudit.

§. XVI. Continent hi libri in ſe principia & fundamenta ad Geometriæ intelligentiam ſcitu neceſſaria; ſicuti ſingulorum librorum contenta quemlibet attentum facile docere poſſunt.

Etenim *primo in libro*, Triangulorum; omnium figurarum planarum ſimpliciſſimarum & primarum ortus, affectionesque primum *Euclides* conſiderat; tum juxta angulos, tum juxta latera ipſa inter ſe comparans; quibus ſubjungit anguli & lineæ biſectionem; addens perpendicularis conſtructionem; angulos rectos, obtuſos, acutos, deinceps-poſitos, adverticem, externos, internos. Dein linearum æquidiſtantium proprietates inveſtigans, ad ipſa deſcendit parallelogramma ex iis nata; eorum ortus, & ſymptomata, quæ illis inſunt, declarat. Porro Triangula cum parallelogrammis comparat, ac quonam pacto parallelogrammum æquale fiat Triangulo aſſignat. Tandem in Triangulo Rectangulo quadrati, quod à latere rectum angulum ſubtendente, deſcribitur, cum quadratis, quæ à reliquis lateribus fiunt, proportionem inveſtigat. In

In *ſecundo libro*, parallelogrammi rectanguli, gnomoniſque definitionem tradit; lineæque diviſæ, quanta ſint quadrata oſtendit; illaque cum parallelogrammis ſegmentorum confert; dein quadratorum, quæ à lateribus triangulorum obtuſangulorum, & acutangulorum deſcribuntur, proportiones cum quadratis, quæ fiunt à ſubtendentibus angulum obtuſum & acutum, expendit. Denique oſtendit qua ratione conſtruatur quadratum rectilineo dato æquale. Hujus libri propoſitiones, præter linearem, qualem in plerisque codicibus habent, demonſtrationem, etiam decem priores in numeris demonſtrari poſſunt; quod jam olim præſtitit *Barleamus Monachus*, ac poſt linearum demonſtrationem in commentario ſuo numeralem ſubjungit *Clavius*. Nonnulli per Algebram ſpecioſam easdem reſolvunt, uti *Sturmius* in *Archimede Germanico*, aliique.

Tertius liber, agit de iis, quæ circulis accidunt, ac de rectis lineis in circulo vel ad circulum ductis; itemque angulos tam ad circulorum centra, quam ad peripherias conſtitutos rimatur; ultimo æqualitatem angulorum æqualibus arcubus chordisque inſiſtentium demonſtrat.

Quartus qui ſubjungitur *liber* quaſi tertii praxis eſt, figurarum planarum, Trianguli, Quadrati, Pentagoni, Hexagoni, Quindecagoni inſcriptiones in circulo, & circumſcriptiones docens.

Quintus qui ſequitur *liber* Magnitudinum Proportiones generales tradit; modosque

argu-

argumentandi quoſdam, in proportionibus apud Geometras frequentiſſime uſitatos: alternam ſeu permutatam rationem, inverſam, compoſitionem, diviſionem, converſionem, ex æqualitate ordinatam ac perturbatam; firmos ac validos eſſe oſtendit.

In ſexto libro, proportiones figurarum planarum commonſtrat, oſtendens Phænomena Triangulorum proportionalium, æqualium, ſimiliumque; ſectionem lineæ in tot, quot, volueris, partes; inventionem tertiæ, quartæ, ac mediæ proportionalis; rationes figurarum reciprocarum, & parallelogrammorum ad ſe invicem, nec non polygonorum, parallelogrammorum applicationes ad rectas lineas, quæ vel deficiunt parallelogrammis ſimilibus, vel excedunt: porro quomodo recta linea terminata extrema ac media ratione ſecetur; ultimo proportiones circumferentiarum, angulorum, ac ſectorum in circulis æqualibus inquirit.

Septimus liber, numerorum indicat proprietates, in eo agitur de numeris primis & compoſitis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis menſura invenitur; de numerorum parte, & partibus; de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcunque in libro quinto de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonſtrantur.

Octavus liber, numeros deinceps proportionales, numeros planos, quadratos, cubos, & ſolidos; ſimiles planos, atque ſimiles ſolidos indicat.

Nonus

Nonus, numeros ſimiles planos, cubos, ſolidos, numeros deinceps proportionales, ſive ab unitate, ſive ſimpliciter; numeros primos, numeros pares, impares, pariter pares, pariter impares, numeros perfectos declarat.

De hiſce tribus numerorum libris, qui Arithmeticorum vocantur, diſſentiunt inter ſe Viri Docti. Quidam putant *Euclidem* in iis plus præſtitiſſe, quam ejus præſtare fuit intentio; ac ex iis profluxiſſe quidquid hactenus de numeris ſcitur, aut deinceps ſciri poteſt; quam ſententiam amplectitur TACQUET *in præfat. Arithmetica ſua.* Quidam vero contendunt, *Euclidem* tantum de Arithmetica iis in libris tractaſſe, quantum rei Geometricæ inſervit; ut planius ac plenius commenſurabilium & incommenſurabilium demonſtrationes fieri poſſent: inter quos CLAVIUS, RHODIUS, FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA; ſcribit enim CLAVIUS *ad Def.* 1. *Elem.* 10. *Abſolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas*; idem ſentit FLUSSAS *in præfat. in lib.* 7.

Decimus liber, magnitudines commenſurabiles & incommenſurabiles, itemque rationales & irrationales explorat.

In Undecimo, tandem ad Stereometriam devolvimus, in qua pertractanda, eodem quo in planis proceſſerat, uſus eſt modo; à ſimpliciſſimis, Geometrarum more incipiens, lineis ſcilicet, quatenus ad corpora ſoli-

vel parum ſe in eo exercuit, quin PYTHAGORÆ in Geometria merita, propter inventa ejus utiliſſima, quæ inter *Euclidis Elementa* reperiuntur, extolli admodum animadverterit. Ille enim Autor eſt, Trianguli cujuscunque rectilinei tres angulos ſimul ſumtos duobus rectis æquales eſſe; quæ eſt 32. PROPOSITIO. ELEMENTI. I. Eidem huic præclaro Geometræ acceptas referimus PROPOSITIONES. 44, 47. ejusque converſam 48. ELEMENTI. I. Quarum 47. PROPOSITIO ſpeciali notatur denominatione, ſatis indicante, PYTHAGORAM primum Autorem habere; cum *Hecatombes Pythagorici* nomen gerit, ſub eoque titulo paſſim apud Scriptores celebratur. Hujus vero denominationis originem petunt ab oblatione Boum, à *Pythagora* Muſis facta, in gratiarum actionem, pro ejus Demonſtrationis inventione. Hæc eſt illa adeo celebris Propoſitio, quæ ob ingentem ſuam utilitatem, Inventoris ſui famam immortalem reddidit. Præter has recitatas Propoſitiones in Elemento primo *Euclidis* occurrentes, aliæ etiam ſunt, quæ in ſequentibus Euclideis Elementis reperiuntur. Nam THALETEM MILESIUM, angulum in ſemicirculo eſſe rectum, inveniſſe referunt; eaque eſt apud *Euclidem* PROPOSITIO 31. ELEMENTI. III. Porro inter ejusdem THALETIS inventa variæ Propoſitiones Elementi Quarti enumerantur. Etenim tribui Ei ſolent à multis Scriptoribus PROPOSITIONES. 2, 3, 4. & 5. ELEMENTI. IV.

Qui-

Quibus addunt, Eum reperiſſe modum, Triangulum Æquilaterum in Circulo inſcribendi; cujus inventi lætitia elatus, Bovem Muſis immolaſſe dicitur. Porro ſunt qui ſtatuunt, QUINTUM EUCLIDIS ELEMENTUM ab EUDOXO CNIDIO eſſe compoſitum: quia EUDOXO à veteribus, de Proportionibus à ſe inventis, multa adſcribuntur. Certum enim eſt è teſtimoniis antiquorum, EUDOXUM de Proportionibus ſcripſiſſe. Si itaque omnia, quæ in ELEMENTO V. EUCLIDIS occurrunt, non ſunt EUDOXI, ſaltem pleraque ab ipſo profecta eſſe, *Proclus* clare ſatis teſtatur. Quare *Euclides* ea, quæ de Proportionibus habet, ex EUDOXI ſcriptis hauſiſſe, ſi non omnia, ſaltem plurima, cenſendus eſt; cum *Proclus* ait, *Euclidem* multa *Eudoxi* in ſuis Elementis in ordinem redegiſſe. Memoratur etiam THEÆTETUS, ob Demonſtrationem PROPOSITIONIS. 10. ELEMENTI. X. à ſe primo datam. Denique quæ de SOLIDIS, tribus ultimis ELEMENTIS, nempe XI, XII, XIII. demonſtravit *Euclides*, in iis THEÆTETUM, ARISTÆUM, aliosque ſecutum eſſe *Euclidem*, Autores referunt. Verum inde non derogatur, ejus laudi, quod aliorum placita conſuluerit; cum inconcuſſis fundamentis Autorum inventa, ordine nunquam corrigendo, ſuperſtruxerit. Videantur PROCLI *Comment. in Euclid.* DECHALES *in Tract. de ortu & Progreſſu Matheſ. pag.* 7. 8. & TAC-

Digitized by Google

QUET *in Hiſtorica narrat de ortu & progreſſu Matheſ.* aliique plures.

§. XIV. Hoc vero Elementorum corpus, ſecundum multorum Doctorum ſententiam, *Euclides* diviſit in *Tredecim* libros; licet vulgo à nonnullis *quindecim* enumerentur Elementorum libri: immo in quibusdam exemplaribus *Sedecim Euclidis* nomen ferunt. Verum obſervat VOSSIUS *de Scient. Math. cap.* xv. §. 3. etiamſi multi putent Elementa hæc conſtare libris xv. rem tamen non ita apertam eſſe de duobus poſtremis. Anſam dubitandi de XIV. & XV. Elementis, an quidem *Euclidis* ſint, præbet *Theonis* in *Euclidem* Commentarius. Etenim *Theon Alexandrinus*, *Euclidis* Elementorum valde ſtudioſus, qui ea ſuis expoſuit Diſcipulis, claruit *Theodoſio Magno* imperante, anno Chriſti 395. mortuo, uti refert VOSSIUS *loc. cit. cap.* 16. §. 9. Ille vero *Theon* in tredecim *Euclidis* priores libros, tantum commentatus eſt; uti *Campani* ſecundum *Theonis* expoſitionem, Editio Elementorum *Euclidis* teſtatur. Qua itaque expoſitione in hæc Elementa manifeſto indicaſſe videtur, Eum tredecim tantum agnoviſſe libros Elementorum ab Euclide conſcriptos. Præterea *Marinus Philoſophus*, *Procli Diadochi* diſcipulus, circa annum Chriſti 500. florens, in Protheoria ad Data Euclidis, Tredecim Elementorum libros Euclidi ſolummodo tribuit. Tot etiam libri reperiuntur, in Elementorum Euclidis verſione Arabica *Naſiridini Tu-*

ſini

Digitized by Google

ſini Perſa, quæ luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ anno 1594. ex Typographia Medicea. Sicuti multa alia ſunt exemplaria, uti *Rhodii*, *Richardi*, aliorumque, in quibus ultimi duo nempe XIV. & XV. non reperiuntur libri. Accedit quod ultima propoſitio Elementi XIII. veluti colophonem operi imponit. Conferatur FABRICIUS *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* 14. Sed porro obſervandum venit, Librum decimum quartum propriam habere præfationem, quam nec primum Euclidis Elementum habet; *non vano argumento* inquit GREGORIUS *in præfat. in Elem. Euclid. duos ultimos libros alterius eſſe quam Euclidis.* Conſentiente VOSSIO *de Scient. Math. cap.* XV. §. 3. & DECHALES *in Tract. de ortu & progreſ. Math. pag.* 8. 9. Ex quibus abunde videtur conſtare, Tredecim Elementorum libros, ab Euclide tantum fuiſſe compoſitos; binos reliquos ſcilicet XIV. & XV. alium agnoſcere Autorem. Hi vero poſteriores bini libri, à quamplurimis, Commentarii HYPSICLIS ALEXANDRINI habentur. Vixit *Hypſicles* circa Tempora *Ptolemæi Lathyri* (nempe toto ſeculo, vel paulo ulterius, ante natum Chriſtum.) *Iſidori* ſummi Mathematici diſcipulus. VOSSIUS *loc. cit. cap.* 54. §. 7. Ipſa præfatio quæ Elemento XIV. præmittitur, eſt prooemium *Hypſiclis Alexandrini* ad *Protarchum*: ex quo haud difficulter colligere eſt, illud neutiquam convenire *Euclidi*, at bene *Hypſicli Alexandrino*, de quo in iſto loquitur Prooemio. Ut cætera

Digitized by Google

tera taceam, quot verba, tot argumenta, Euclidem non eſſe ejus Autorem arguentia, reperiuntur. Etenim mentionem injicit ſcriptorum *Apollonii*; de comparatione Dodecaëdri, & Icoſaëdri, eidem ſphæræ inſcriptorum: id neutiquam de *Euclide*, qui ante *Apollonium* ſcriptis inclaruit, prædicari poteſt; ſed quidem de *Hypſicle* qui multo poſt vixit. Conferatur FABRICIUS *loc. cit.* Sicut etiam GEORGIUS VALLA, & BARTHOLOMÆUS ZAMBERTUS VENETUS, qui ſub *Hypſiclis Alexandrini* nomine, poſteriores duos Elementorum libros, latine verterunt. Eoſdem ob *Hypſicle Alexandrino* compoſitos eſſe cenſent, SAVILIUS, GREGORIUS, CLAVIUS, DECHALES; locis jam jam citatis; & innumeri alii. Decimus Sextus Liber, qui in nonnullis codicibus, non tamen in omnibus, prioribus annectitur, nunquam *Euclidi* fuit adſcriptus; licet in ordine Elementorum in Clavii Editione Euclidis Elementis annumeretur; ſed ille eſt adjectus à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA; uti in fronte hujus libri à quolibet legere eſt. Ac ob materiæ convenientiam Elementis adjungitur, ſicuti duo præcedentes libri, de ſimili argumento, cum Elemento decimo tertio Euclidis tractantes, propterea à nonnullis cum Euclidis Elementis XIII. connectuntur, iiſque adjunguntur.

§. XV. Tredecim hi Elementorum libri, reſpectu Doctrinarum, quas *Euclides* de Quan-

Digitized by Google

Quantitatibus in iis pertractavit, cum CLAVIO & GREGORIO commode *in quatuor* diſpeſci poſſunt *partes*: licet bipartita diviſio, in *Superficierum* & *Solidorum* contemplationem, ſufficiens eſſet; quia PROCLUS nobis Autor eſt, nullam peculiarem ſuis in Elementis, de Punctis & Lineis tractationem inſtituiſſe *Euclidem*. Verum Solidorum *Euclidis* ſpeculationes, de corporibus regularibus Sphæræ includendis, rite intelligi nequeunt, niſi præceſſerit notitia Linearum Commenſurabilium, & Incommenſurabilium; cum diametri ad latus proportio non ſemper rationalis eſt. Harum vero Linearum intelligentia, Numerorum ſcientiam præviam ultro efflagitat; ac cum corpora illa ſolida, baſibus planis, lateribus, & angulis planis continentur; cumque omne Solidum præſupponit Planum, ex quo Originem ducit, oportebat Doctrinam Planorum primo loco tradere: inde nata eſt Diviſio horum Elementorum in partes quatuor. *In prima parte*, *Plana* contemplatur; quorum Doctrinam Sex prioribus abſolvit libris: & quidem ita, ut Quatuor primis Elementis Plana abſolute ſpeculetur; ſequente vero Elemento Quinto Magnitudinum Proportiones in genere tractat; easque Figuris nonnullis Planis in Sexto Elemento applicat. *Secunda pars*, *Numerorum* affectiones exponit, quorum notitiam tribus ſequentibus libris, Scilicet Septimo, Octavo, & Nono comprehendit. *Tertia in parte*, *Summetriam*, ſive de Lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus

 Scien-

Scientiam docet, hancque unico, Decimo nempe libro complexus eſt. *Quarta* denique *in parte*, *Stereometriam*, ſeu ſolidorum doctrinam examini ſubjicit, eorumque contemplationem tribus ultimis libris, Undecimo, Duodecimo, & Decimo tertio, proponit ac demonſtrat. Quibus peractis cum ultima propoſitione Libri Decimi tertii Elementa ſua claudit.

§. XVI. Continent hi libri in ſe principia & fundamenta ad Geometriæ intelligentiam ſcitu neceſſaria; ſicuti ſingulorum librorum contenta quemlibet attentum facile docere poſſunt.

Etenim *primo in libro*, Triangulorum; omnium figurarum planarum ſimpliciſſimarum & primarum ortus, affectionesque primum *Euclides* conſiderat; tum juxta angulos, tum juxta latera ipſa inter ſe comparans; quibus ſubjungit anguli & lineæ biſectionem; addèns perpendicularis conſtructionem; angulos rectos, obtuſos, acutos, deinceps-poſitos, adverticem, externos, internos. Dein linearum æquidiſtantium proprietates inveſtigans, ad ipſa deſcendit parallelogramma ex iis nata; eorum ortus, & ſymptomata, quæ illis inſunt, declarat. Porro Triangula cum parallelogrammis comparat, ac quonam pacto parallelogrammum æquale fiat Triangulo aſſignat. Tandem in Triangulo Rectangulo quadrati, quod à latere rectum angulum ſubtendente, deſcribitur, cum quadratis, quæ à reliquis lateribus fiunt, proportionem inveſtigat. In

Digitized by Google

In *ſecundo libro*, parallelogrammi rectanguli, gnomoniſque definitionem tradit; lineæque diviſæ, quanta ſint quadrata oſtendit; illaque cum parallelogrammis ſegmentorum confert; dein quadratorum, quæ à lateribus triangulorum obtuſangulorum, & acutangulorum deſcribuntur, proportiones cum quadratis, quæ fiunt à ſubtendentibus angulum obtuſum & acutum, expendit. Denique oſtendit qua ratione conſtruatur quadratum rectilineo dato æquale. Hujus libri propoſitiones, præter linearem, qualem in pleriſque codicibus habent, demonſtrationem, etiam decem priores in numeris demonſtrari poſſunt; quod jam olim præſtitit *Barleamus Monachus*, ac poſt linearum demonſtrationem in commentario ſuo numeralem ſubjungit *Clavius*. Nonnulli per Algebram ſpecioſam easdem reſolvunt, uti *Sturmius* in *Archimede Germanico*, aliique.

Tertius liber, agit de iis, quæ circulis accidunt, ac de rectis lineis in circulo vel ad circulum ductis; itemque angulos tam ad circulorum centra, quam ad peripherias conſtitutos rimatur; ultimo æqualitatem angulorum æqualibus arcubus chordiſque inſiſtentium demonſtrat.

Quartus qui ſubjungitur *liber* quaſi tertii praxis eſt, figurarum planarum, Trianguli, Quadrati, Pentagoni, Hexagoni, Quindecagoni inſcriptiones in circulo, & circumſcriptiones docens.

Quintus qui ſequitur *liber* Magnitudinum Proportiones generales tradit; modoſque

argu-

argumentandi quosdam, in proportionibus apud Geometras frequentiſſime uſitatos: alternam ſeu permutatam rationem, inverſam, compoſitionem, diviſionem, converſionem, ex æqualitate ordinatam ac perturbatam; firmos ac validos eſſe oſtendit.

In ſexto libro, proportiones figurarum planarum commonſtrat, oſtendens Phænomena Triangulorum proportionalium, æqualium, ſimiliumque; ſectionem lineæ in tot, quot, volueris, partes; inventionem tertiæ, quartæ, ac mediæ proportionalis; rationes figurarum reciprocarum, & parallelogrammorum ad ſe invicem, nec non polygonorum, parallelogrammorum applicationes ad rectas lineas, quæ vel deficiunt parallelogrammis ſimilibus, vel excedunt: porro quomodo recta linea terminata extrema ac media ratione ſecetur; ultimo proportiones circumferentiarum, angulorum, ac ſectorum in circulis æqualibus inquirit.

Septimus liber, numerorum indicat proprietates, in eo agitur de numeris primis & compoſitis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis menſura invenitur; de numerorum parte, & partibus; de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcunque in libro quinto de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonſtrantur.

Octavus liber, numeros deinceps proportionales, numeros planos, quadratos, cubos, & ſolidos; ſimiles planos, atque ſimiles ſolidos indicat.

Nonus

Nonus, numeros ſimiles planos, cubos, ſolidos, numeros deinceps proportionales, ſive ab unitate, ſive ſimpliciter; numeros primos, numeros pares, impares, pariter pares, pariter impares, numeros perfectos declarat.

De hiſce tribus numerorum libris, qui Arithmeticorum vocantur, diſſentiunt inter ſe Viri Docti. Quidam putant *Euclidem* in iis plus præſtitiſſe, quam ejus præſtare fuit intentio; ac ex iis profluxiſſe quidquid hactenus de numeris ſcitur, aut deinceps ſciri poteſt; quam ſententiam amplectitur TACQUET *in præfat. Arithmetica ſua*. Quidam vero contendunt, *Euclidem* tantum de Arithmetica iis in libris tractaſſe, quantum rei Geometricæ inſervit; ut planius ac plenius commenſurabilium & incommenſurabilium demonſtrationes fieri poſſent: inter quos CLAVIUS, RHODIUS, FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA; ſcribit enim CLAVIUS *ad Def.* 1. *Elem.* 10. *Abſolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas*; idem ſentit FLUSSAS *in præfat. in lib.* 7.

Decimus liber, magnitudines commenſurabiles & incommenſurabiles, itemque rationales & irrationales explorat.

In Undecimo, tandem ad Stereometriam devolvimus, in qua pertractanda, eodem quo in planis proceſſerat, uſus eſt modo; à ſimpliciſſimis, Geometrarum more incipiens, lineis ſcilicet, quatenus ad corpora ſoli-

ſolida referuntur; quando in uno plano poſitis, iisque ad planum vel rectis, ſeu perpendicularibus, vel parallelis; item de planis ſeſe mutuo ſecantibus; quomodo à puncto in ſublimi dato ad planum perpendiculares ducuntur; denique diſſeruntur tum de planis, tum de ſolidis angulis, de parallelepipedis, & priſmatibus æqualibus nonnulla.

Duodecimus, ac ſolidorum ſecundus liber, doctrinam de corporibus fuſius perſequitur, in eo priſmata & pyramides, cylindri & coni invicem comparantur, ſimulque edocet inſcriptionem polygoni in circulo, & Polyedri in ſphæra; ſphæraſque triplicatam ſuarum diametrorum habere rationem.

Decimus Tertius, corporum regularium quinque, ſeu Platonicorum dictorum, conſtitutionem contemplatur, ea corpora quidem Platonica appellantur, à Pythagora vero jam defecta ſunt, uti patet ex veteri Epegrammate *in Synopſi Geometrica* MICH. PSELLI allegato,

Σχήματα πέντε Πλάτωνος, ἁ Πυθαγόρας σοφὸς εὖρε.

Πυθαγόρας σοφὸς εὖρε, Πλάτων δ' ἀριδηλ ἐδίδαξεν.

Εὐκλείδης επι τοῖσι κλέος περικαλλὲς ἔτευξεν.

hoc eſt,

Figuræ quinque (ſunt) Platonis, quas Sapiens Pythagoras invenit.

Pythagoras ſapiens eas invenit, Plato vero manifeſte docuit.

Eu-

Euclides ſuper his gloriam ſplendidam ſtruxit.

Conferatur GREGORIUS *loc. cit.* Ad horum corporum evidentiorem intelligentiam præmittuntur quædam de lineis extrema ac media ratione ſectis, ſubſequuntur relationes Pentagonorum, Hexagonorum, Decagonorum, triangulorum regularium circulis inſcriptorum: tandem Pyramidem, Octaëdrum, Hexaëdrum, Icoſaëdrum, ac Dodecaëdrum conſtruere aſſignet, horumque corporum latera proponit, eaque inter ſe componit.

Decimus Quartus, & *decimus quintus* libri, qui licet in nonnullis exemplaribus *Euclidis* nomine veniunt, HYPSICLIS ALEXANDRINI eſſe videntur; ſimile tamen fere tractant argumentum. In *quarto decimo* enim comparantur Dodecaëdrum, & Icoſaëdrum in eadem ſphæra deſcripta. *In quinto decimo* quinque corpora indicata inſcribuntur, ac eorum latera & anguli inveniuntur.

Decimus ſextus, liber à CANDALLA adornatus, quique aliquando præcedentibus annectitur, varias ſolidorum regularium, ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorumdem comparationes explicat. Conferantur COMMANDINI *in Elementa Euclidis Prolegomena*, circa finem; & GEORGE MATHIAS BOSE *in Scediaſmate literario de contentis Elementorum Euclidis.*

§. XVII. Hanc per Elementa diſtributam, materiam convenienti *Ordine* ac *Methodo* diſpo-

Digitized by Google

diſpoſuit *Euclides*; in quo indagando, eum, quo *Euclides* ipſe uſus eſt, cum primum, ad hanc doctrinam ſpeculandam ſeſe accingeret, puto deſtinguendum eſſe ab illo, quem jam in illis Elementis tenemus. Quando, enim mecum reputo *Euclidem* ſibi Scopum & Finem conſtituiſſe, corporum mundanorum conſtitutionem ſpeculationi ſuæ ſubjicere; inde haud obſcure colligere mihi videor, primo intendiſſe eum, ac ſibi ad contemplandum propoſuiſſe *Elementum decimum tertium*; nempe quinque corpora regularia Platonica in eandem includere ſphæram, quæque eorum invicem ſit proportio, demonſtrare. Ad quod autem præſtandum, neceſſe ei fuit extremas illas de corporibus regularibus propoſitiones in ſimpliciores, cauſas & principia earum propoſitionum continentes, ſemper reſolvere; atque hac methodo pedetentim ad prima tandem devolvere principia. Cum vero Methodus Analytica eſt, quæ rem in ſua principia ſive Elementa, & concluſionem quamcunque in propoſitiones, quæ continent cauſas & principia concluſionis reducit; inde manifeſto cuilibet apparere ſuſpicor, *Euclidem* omnium primo *Methodo Analytica* proceſſiſſe in ſuis Elementis adornandis. Nos autem qui iis utimur Elementis, quando eorum auxilio ducimur, ad Propoſitiones in iis propoſitas demonſtrandas & intelligendas, à principiis ejus incipientes, & gradatim ad ultimas usque adſcendentes; cumque ſic ex princiis, ad id, quod ex iis ſit, progredimur;

mur; *Methodum* ſequimur *Syntheticam*. Quod vero ipſam ſpectat diſpoſitionem eorum, quæ per hæc diſtribuit Elementa, ſciendum omnino eſt; ſanas omnes Scientias certa quædam & definita habere principia, ex quibus ea, quæ ſequuntur demonſtrant. Quare rite diſtinguendum eſt inter id, quod principiorum fungitur officio, & id, quod à principiis iis fluit; & quidem eo magis, quod principia Scientiarum debent eſſe per ſe clara, & evidentia magis quam quæ ex iis derivantur. Cum per ſeſe ſibi fidem faciunt, nulla principiorum reddenda eſt ratio. Quæ vero Principia conſequuntur omnino rationibus confirmanda; quippe illa deinceps per principia prius intellecta cognoſcimus. Hæc enim qui inter ſe confundit, & principia cum iis, quæ ab his fluunt, commiſcet, is totam perturbat cognitionem; ea conjungens quæ nullo modo inter ſe conveniunt. Hac de re probe edoctus *Euclides* in ſuis Elementis componendis, ſeorſum & principia, & quæ ea ſequuntur pertractavit; talia ſtatuens principia, quæ ob evidentiam ſuam per ſeſe fidem mereant, nulla eorum adhibita demonſtratione. Eaque præmiſit vel generalia ad omnia Elementa ſpectantia, vel ſingulis libris propria; quæ in fronte ſuorum librorum collocavit. E quibus præviis dein rationes petit eorum quæ principia conſequuntur; cum Propoſitionum demonſtrationes ex iis hauriens, probatam præcedentem, ſequentis demonſtrandæ principium ſtatuit;

Digitized by Google

taliquc ordine Elementarem ſuam diſpoſuit Inſtitutionem.

§. XVIII. Ipſa autem *principia* quod attinet, quæ *Euclides* poſuit fundamenta, quibus Geometriæ Doctrinam ſuperſtrueret, in tria diviſit genera; *Definitiones*, *Petitiones ſeu poſtulata*, & *Axiomata* ſeu *communes notiones*. In *Definitionibus* vocabula artis exponit, ſeu quem ſenſum fundet hoc vel illud vocabulum, in iis declarat; ac Geometrarum more vocis explicatione ſemel indicata, eadem ſemper ſignificatione per totum Elementare corpus utitur: ne dein eorum ambiguitate aut obſcuritate circumventi, in falſas incidamus concluſiones. Tales vocum Expoſitiones ſingulis Elementorum libris, ad ejus intelligentiam perneceſſariarum, ac ad unumquemque librum proprie reſpicientium, præmiſit. *Poſtulata*, quæ & alias *Petitiones* dicuntur, ſunt, quibus aliquid admitti petimus, quod perfacile fieri poteſt: eaque ſunt adeo clara & perſpicua in his Elementis, ut nulla indigeant confirmatione, ſed auditoris duntaxat aſſenſum expoſcunt; ne ulla ſit in Demonſtratione hæſitatio, aut difficultas. Tria ſuis in Elementis poſuit Poſtulata *Euclides*, quibus id tantum intendiſſe videtur, ut ipſi concederetur uſus Regulæ & Circini, ne dein de ſchemate eorum ope facto, quaſi non ſit Mathematicum, lis moveretur. Inde factum eſt, quod nulla *operatio Mathematica* creditur, niſi quæ per hæc inſtrumenta, nullo alio adhibito admi-nicu-

niculo mechanico, inſtituatur; quæ vero figurarum delineatio aliis indiget inſtrumentis, *operatio Mechanica* dicitur. *Axiomata* vero quæ & *communes notiones* ſæpe audiunt, ſunt propoſitiones ſeu enunciationes potius per ſe manifeſtæ, cognituque perfaciles, quæ ſine ulla demonſtratione à quolibet concedi, & communi conſenſu aſſumi debent. Verum poſtulata inter & axiomata hoc intercedit diſcrimen, quale inter Problema & Theorema: ac ſicuti in Problemate operatio fit, ita in Poſtulato; ſicut in Theoremate aliquid contemplationi ſubjicitur, ita in axiomate. Hæc bina ultima principiorum genera univerſaliter toti præmittit Elementorum Syſthemati, non autem peculiariter cuilibet eorum libro; confer. CLAVII *Prolegomena in Euclidis Elementa*.

§. XIX. Hiſce Principiis præmiſſis ad ipſam rem ſeſe accingit, ac aliquid tum ad faciendum, tum ad contemplandum adducit; idque *Propoſitiones* vocat: quas in duas diſtinguit ſpecies, alteram *Problema*, *Theoreme* alteram nominat. *Problema* apud Mathematicos eſt Propoſitio, qua aliquid facere & operari jubemur; vel ad ſimilitudinem Problematis Dialectici, in qua utraque contradictionis pars vera aut falſa eſſe poteſt. Sic quæſitum illud apud Mathematicos, quo aliquid jubent conſtruere, & cujus contrarium etiam effici poteſt, Problema appellatur. Vel ſecundum *Commandinum*, Problema illud eſt, in quo quippiam,

cum primum non ſit, proponitur inveniendum, ac conſtruendum. Uti ſupra rectam lineam finitam Triangulum æquilaterum conſtituere, Problema eſt. In omni Problemate duo notanda veniunt; *Datum*, & *Quæſitum*: ſic in aſſignato Problemate, datum eſt, recta linea finita; quæſitum, trianguli æquilateri ſuper datam lineam conſtitutio. Problematum tres ſpecies Veteres ponunt Mathematici, *Planum*, *Solidum*, & *Lineare*. *Planum* dicitur, quod per rectas lineas & circuli circumferentiam ſolvi poteſt. *Solidum* eſt, ad cujus reſolutionem Sectiones Conicæ requiruntur. *Lineare* denique, quod præter jam dictas lineas alias etiam ad ſui conſtructionem deſiderat. Ex his vero tribus Problematum ſpeciebus, prima tantum in Elementis Euclideis reperitur, omiſſis duabus reliquis. Problemata Euclidis duplicia ſunt, vel *determinata* vel *indeterminata*. *Determinata* ſunt, propoſitiones quæ cum reſtrictione fieri poſſunt, uti eſt 22. *Elementi* I. Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere; ubi additur hæc reſtrictio; oportet autem duas reliqua eſſe majores omnifariam ſumtas. *Indeterminata* ſunt propoſitiones, quæ univerſaliter fieri poſſunt. *Theorema* eſt Propoſitio ad contemplandum propoſita, quæ paſſionem aliquam, proprietatemve unius, vel plurium ſimul quantitatum edit; ſicuti Propoſitio hæc, quod in omni Triangulo rectilineo tres anguli ſimul ſumti ſunt æquales duobus rectis, non jubet

aut

aut docet triangulum vel aliquid conſtruere; ſed ſolummodo Trianguli cujuslibet conſtituti, paſſionem hanc comtemplari proponit; quod anguli illi ſint duabus rectis æquales: unde à contemplando talis Propoſitio Theorema dicitur. Ideo Theorema, definiente *Commandino*, eſt in quo quippiam in conſtituta jam figura ita eſſe, vel non eſſe demonſtratur. In Theoremate duo etiam notanda veniunt, *antecedens* & *conſequens*; *Antecedens* dicitur id, quod conditiones proponit; & iis admiſſis, id, quod inde evenit, *Conſequens* dicitur. Uti in 5. *prop. Elem.* I. Antecedens eſt, anguli ad baſin triangulorum Iſoſceliorum conſtituti; Conſequens, ſunt inter ſe æquales. Hæc Theorematis bina membra ſæpiſſime nomine *datorum* & *quæſitorum* occurrunt; quod prius dari ſeu concedi antecedens debeat, quam in ſequentis veritatem inquiri poſſit. Inſerunt aliquando Geometræ Theoremata vel Problemata minus principalia, ut alia brevius demonſtrari poſſint, eaque *Lemmata* vocant; quæ dici poſſunt demonſtrationes ſeu conſtructiones illius, quod ad demonſtrationem, alicujus Theorematis vel Problematis principalis aſſumitur, ut demonſtratio expeditior fiat ac brevior. Interdum ſubjungunt *Corollaria* vel *conſectaria*, quæ ſunt propoſitiones, immediate ex præcedenti demonſtratione lucem accipientes, quæque peculiari demonſtratione non egent. vid. CLAVIUS *Prolegomena in Euclidem*, & REYHERUS *in diſſert. de Euclide. cap.* 4.

Digitized by Google

§. XX. Propoſitis Quantorum proprietatibus, earum *Demonſtrationes*, quibus certo conſtat, rem in Propoſitione indicatam principiis poſitis convenientem eſſe, ſubjungunt cum *Euclide* Mathematici. Verum ut Demonſtrationum adornatio facilior evadat, quædam demonſtrationi ipſi, ex quibus plurimum lucis ſæpe foenerantur ea, quæ demonſtrationi inſerviunt, Geometræ præmittunt. Etenim in Theorematibus, recitatis iis in propoſitione propoſitis, enumeratisque datis ac quæſitis rerum indicatarum, priusquam propoſita demonſtranda ſuſcipiunt, *præparationem* quandam inſtituunt, qua propoſitionis propoſitæ Schema illuſtratur. In Problematibus vero, iisdem, ac in Theorematibus, prius recenſitis, eorum *conſtructionem* efficiunt; ac, ut demonſtratio legitime fieri poſſit, quandoque etiam *præparationem* addunt. Quibus omnibus rite peractis, eorum, quæ proponuntur, ipſam demonſtrationem incipiunt Geometræ. In Demonſtrationibus ſuis inſtituendis duplici Methodo procedunt Geometræ, vel *directe* demonſtrant ea, quorum in propoſitionibus fit mentio, vel *indirecte*. *Directa Demonſtratio* quæ & *Oſtenſiva* appellatur, ea eſt, in qua aliquid probatur & ſcientifice cognoſcitur, à principiis, tanquam cauſa ad effectum procedendo; eaque in ſcholis vocatur *demonſtratio à priori*, quia cauſa effectu prior eſt. Ejusmodi probatio vera eſt, & proprie dicta demonſtratio, quæ per ſe directe

recte ad ſcientiam ducit. *Indirecta*, ſive ad *incommodum*, vel *impoſſibile* ducens, eſt, quando contrarium propoſitionis demonſtrandæ aſſumimus, idque cum ipſa propoſitione conjungimus; ut fiat ſyllogiſmus concluſionem inferens, quæ cum principio quodam pugnat, adeoque contrarium propoſitionis falſum eſſe evincit; eaque eſt *à poſteriori*, quia effectum, id eſt Hypotheſin adverſarii primo loco ponit, eamque examinat. Hæ binæ demonſtrationum ſpecies ſi juxta æquam lancem ponderentur, plus roboris directæ demonſtrationi ineſſe quemlibet facile concedere ſuſpicor, modo penſitet ex principiis evidentibus apta idearum connectione, oſtenſivam petitam eſſe probationem. Verum ubique talis demonſtratio oſtenſiva haberi nequit, in quo caſu ad incommodum ducentibus argumentis utendum eſt; ubi vero directæ inſtitui poſſunt Demonſtrationes, illæ multum præferendæ ſunt; ac indirectis abſtinendum eſt. Ambo hæc Demonſtrationum Genera ſuis in Elementis adhibuit *Euclides*; cum hoc tamen diſcrimine quod longe pluribus uſus fuerit oſtenſivis; ubi autem commode directas habere non potuit apodeixes, indirectas ſeu ad abſurdum ducentes dedit demonſtrationes. Quod nullo modo *Euclidi* vitio vertendum eſt, cum eo loco tantum ad impoſſibile ducentes inſeruerit; ubi commode directam demonſtrationem tradere non potuit; videatur REYHERUS *in diſſert. de Euclid. cap.* 4.

§. XXI.

§. XXI. *Laudatur* valde à Viris Doctis *ordo*, ac veritatum, ad Geometriæ intelligentiam inde hauriendam, *ſelectus*, quem in Propoſionibus ſuis diſponendis tenuit *Euclides.* Etenim PROCLUS *in commentario ſuo in Euclidem lib.* 2. *cap.* 5. ordinem ac delectum eorum, quæ Euclides per Elementa diſtribuit Theorematum atque problematum, extollit, cum illum quempiam admirari debere ait; *non enim* (addit) *ea aſſumſit omnia, quæ poterat dicere, ſed ea duntaxat, quæ Elementari tradere potuit ordine: adhuc autem omnis Generis ſyllogiſmorum modos, alios quidem à cauſis fidem ſuſcipientes, alios vero à certis notis profectos, omnes autem invincibiles, & certos ad ſcientiamque accommodatos, adduxit.* Quod ſi COMMANDINUM *in proleg. in Euclidis Elem.* audiamus: *Nonne*, dicit inſignis ille Mathematicus, *quilibet ſummopere admiretur Euclidem propter ordinem in hac Elementari inſtitutione; cum admirabili omnium diſpoſitione, antecendentium & conſequentium ordine, ac cohærentia, ut nihil prorſus addi, aut detrahi poſſe videatur*, ea inter ſe vinculo indiſſolubili connexuit. Pariter celebris ille Aſtronomus TYCHO *in Oratione de diſciplinis Mathematicis*, de Euclidis Elementis diſſerens, Diſpoſitionem Elementorum Euclidis debita ſua laude deſcribit; *Euclides enim*, ait, *Elementa continuo ordine, & magna ſolertia ita tradidit, ut à quovis mediocris ingenii acumine prædito non difficulter percipi poſſent.* Quibus addi merentur quæ BLANCANUS *in*

in ſphæra mundi & quidem *in apparatu ad Mathematicas ſcientias pag. m.* 207. ſcribit. *Inter Mathematica monumenta primum eſt Euclidis opus Elementorum, non tantum antiquitate & dignitate, verum etiam Doctrinæ ordine: eſt enim totius Matheſeos baſis & fundamentum.* Laudabilis porro iſte eſt ordo à doctrinæ compendio, quod neque propoſitionum multitudine luxuriat, neque earum paucitate ſui ſtudioſis obſcuritatem creat. Cum ex iis Elementis Geometricam ſcientiam liquido nobis comparare poſſumus: qua de re GREGORIUS *loc. citato* Quærit; *Nullane igitur eſt Methodus compendioſior ad Geometriam addiſcendam, quam hacce per Euclidis Elementa quam adeo reformidant plerique? Huic certe quæſtioni reſpondeat ipſe Euclides. Ille à Ptolemæo Ægypti Rege interrogatus, an via eſſet aliqua ad Geometriam, magis compendiaria ſua* ϛοιχειωσει, *reſpondiſſe fertur autore* PROCLO *in lib.* 2. Μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν. Verum quantumvis elegans & præclarus iſte eſt ordo, attamen taxatur à nonnullis; ſcribit enim de eo CLAUDIUS VERDER. *in Auctorum Cenſione; Euclidem eſſe indigeſtum & incompoſitum, cum enim ab univerſalioribus proceſſus fieri debebat, ne vitioſa ſit repetitio, peſſime à Geometria auſpicatus eſt initium; quam poſt Arithmeticam tractare oportuit.* Eandem de Euclidis Elementis fovet ſententiam famoſus Euclidis oppugnator PETRUS RAMUS, *in Schola ſua Mathematica*, & cum RAMO, LAZARUS SCHONERUS, qui *Euclidis* ordinem & ſelectum valde carpunt, ſed mo-

Digitized by Google

monente VOSSIO *de Scientiis Mathemat. cap.* 16. §. 24. *Hi modum non tenuere in Euclide culpando.* His vero reponimus quæ GREGORIUS *in Præfat. ſua Euclidi præmiſſa* hac de re ſcribit; *Hanc eſſe optimam veræ Methodi Legem exiſtimavit vir accuratiſſimus, ut nihil ſumatur pro vero niſi demonſtratum; nihil demonſtretur niſi ex antecedentibus. Quo fit (inquit* SAVILIUS) *ut ordo, quem iſti Methodiſtæ requirunt ab Euclide, quo nunquam vidit hic ſol μεθοδικώτερον, ſervari non potuerit, niſi ſi quis eſt adeo ineptus, ut neſcio cujus imaginariæ venuſtatis rationem habendam putet, neglecta ſanitate. Quivis eorum, qui Geometriæ Elementa alia Methodo tradenda ſuſcepit, inter Euclideum opus alteriusque cujusvis præter proprium judex conſtituatur; illico patebit diſcrimen.*

§. XXII. Verum quantumvis apta veritatum diſpoſitione illa cohærent Elementa, quæ vulgo *Euclidis* nomine veniunt; dubitant nonnulli an quidem ea Euclidi ſit ad ſcribenda Gloria, cum illa Elementa, quæ hodie in omnium verſantur manibus, *Euclidem* Autorem habere negant. Sed ea à THEONE ALEXANDRINO, qui Senioris THEODOSII temporibus floruit, profecta eſſe affirmant. Saltem PETRUS RAMUS in diverſam à longe plurimis Viris Doctis hac in parte abit ſententiam; Propoſitiones in Elementis Euclideis occurrentes, non *Euclidi* ſed *Theoni* adſcribens; quaſi nullæ forent partes *Euclidis* in iis Elementis, quæ tamen vulgo *Euclidi* tribuuntur. Verum hæc

Rami

Rami opinio Veterum Mathematicorum Teſtimonio repugnat; cum omnis Antiquitas eas *Euclidis*, & non cujusdam *Theonis Alexandrini*, eſſe propoſitiones agnovit. Qua de re HENRICUS SAVILIUS *in prælectionibus in Euclidem* Scribit, *quod eadem hac quæ nunc habemus, eodem ordine, iisdem verbis, agnoſcunt ſub Euclidis nomine Proclus & Boëtius Theone poſteriores, & Anterior Theone Alexander Aphrodiſeus, & omnis antiquitas.* Quare nullum ſupereſſe dubium poteſt, quin *Euclides* Propoſitionum quæ in Elementis obviæ ſunt, Autor ſit habendus, licet *Proclus* nullum referat *Euclidis* inventum; uti RAMUS ſcribit.

§. XXIII. Alii vero, qui parum liberaliores ſunt, Propoſitiones ab *Euclide* factas compoſitasque eſſe aſſerunt, ſed Demonſtrationes *Euclidi* abjudicant; hac forſan de cauſa in errorem abducti, quod in nonnullis codicibus græcis, ſoli traduntur propoſitionum tituli cum figuris, ſine ulla demonſtratione, referente DECHALES *de Progreſſu Matheſeos. pag.* 9. *col.* 1. His reſpondet HENRICUS SAVILIUS, dicens; *homines ſtulti & perridiculi; quaſi ullus unquam artifex ſuas edi voluerit conoluſiones, nullis adjectis probationibus. Hoc neque Philoſophorum quiſquam, nec Medicorum, ne dum Mathematicorum, fecit unquam.* Quanto minus de Mathematicorum Principe id ſuſpicandum. Immo teſtis eſt JOANNES DE BUTEON *in ſuis annotationibus in Euclidem*, quod apud antiquos nun-

nunquam ſine demonſtratione Theoremata proferebantur; ut quæ nullam, ſi nudæ fuerint, habeant utilitatem ac dignitatem. vid. COMMANDINUS *in proleg.* conferatur GREGORIUS *in præfat.* & VOSSIUS *de Scientiis Mathematicis. cap.* 15. §. 9. Cum his etiam ſe conjungit PETRUS RAMUS, qui non contentus Propoſitiones omnes *Euclidi* ſubtrahere, & *Theoni* vindicare, verum etiam Eum Demonſtrationibus omnibus defraudare, easque in *Theonem* conferre omni ſtudio nititur. Ita ut ſecundum RAMUM, *Euclides* in Elementis nihil præſtiterit, ſed omnia *Theon.* Quam ſuam ſententiam, variis rationibus probabilem reddere ſtuduit, in ſuo *Matheſeos prooemio.* Et quidem *primo*, quod *Proclus.* commemorat, Demonſtrationes ab *Euclide* eſſe inventas, verum non refert inter *Euclidis* laudes ullam propoſitionem vel demonſtrationem ab *Euclide* eſſe inventam. *Secundo*, THEON ipſe ſuas editiones in Elementa nominatim laudavit, *in primo commentario. in Ptolemæi magnam conſtructionem*, quo ſibi vindicare videtur *Theon* ipſa Elementa. *Tertio*, quia *Euclidis* demonſtrationes, quæ in *Procli* commentariis leguntur minime cum iis conveniant, quas in Elementis habemus. *Quarto*, quia *Euclidis* Elementorum codicibus quibusdam, hæc adduntur verba in inſcriptionibus, εκ των Θεωνος συνουσιων, id eſt ex *Theonis colloquiis ſive congreſſibus*; ſicuti codex græcus *Euclidis Elementorum*, qui prodiit *Baſileæ apud Joan. Hervagium Anno.* M. D. XXXIII. inſcribitur Ευκλειδȣ Στοιχειων βιβλ. ιε. εκ των

Θεωνος

Θεαιτος συνουσιων. Quæ ſane verba multis occaſionem de Euclideis demonſtrationibus diſputandi dedere; multisque anſam præbuere credendi, Demonſtrationes Propoſitionibus *Euclidis* annexas ad *Theonem* pertinere. Licet vero *Proclus* non diſertis verbis expreſſerit, quasnam *Euclides* invenerit Propoſitiones, & Demonſtrationes, tamen manifeſte ſatis mentem ſuam declarat, multum inveniſſe *Euclidem*, quando de eo ſcribit, quod multa ab *Eudoxo* collecta in ordinem redegerit, ac à *Theæteto* inchoata perfecerit, quæ mollius ab aliis demonſtrata erant, ad firmiſſimas & certiſſimas apodeixes revocaverit. Quæ omnia profecto ſine multarum propoſitionum & demonſtrationum inventis præſtari nequeunt. Secundam quod attinet rationem; verum eſt *Theonem* in *Commentario in Almageſtum*, provocare ad Elementa à ſe edita; *quod vero ſectores*, inquit, *in circulis æqualibus ſint proportionales angulis ad centrum conſtitutis, oſtenſum eſt à nobis in editione Elementorum*, εκδοσει, *ad finem ſexti libri.* Ex quibus verbis, & novam Elementorum editionem adornaſſe *Theonem* conſtat, & nonnulla ab ipſo adjecta; non autem quod ille autor fuerit, demonſtrationum omnium in Elementis obviarum. Vid. GREGORIUS *in Præfat. Euclidis Element. præmiſſa.* Tertiam perpendentes rationem, diſcrimen demonſtrationum indicantem, non tanti ponderis ea eſſe videtur, ut propter eam *Euclidem* ex Elementis exterminaremus. Etenim idem diſcrimen in aliis *Euclidis* ſcriptis reperitur, de quibus non

non controvertitur, an ſint Euclidis, cum omnium conſenſu communi Euclidis ſcripta eſſe judicantur. Sic Data *Euclidis* non eodem prorſus habentur modo, quo apud PAPPUM *in ſeptimo Mathematicarum collectionum libro*. Nec Optica, Catoptrica, quæ Romæ in Vaticana Bibliotheca ſervantur, teſte COMMANDINO *in proleg. in Euclid.* Quid itaque foret cauſæ, cur Elementorum Demonſtrationes Euclidi abjudicaremus, cum cætera Scripta eodem diſcrimine laborantia, ei adjudicaremus? Sane ſi dicendum, quod res eſt; eſt nodum in ſcirpo quærere. Nec majoris momenti eſt quarta denique & ultima ratio, cum hæc verba εκ των Θεωνος συνεσιων in multis codicibus græcis non exſtant; immo Autor eſt SAVILIUS quod hujus tituli in neutro codicum MSS. ullum reperit veſtigium. Quare quæ *Johannes Beteon* de his verbis obſervat, veritati maxime conſentanea eſſe videntur; cum veroſimile eſſe putat verba illa εκ των Θεωνος συνεσιων ita intelligenda eſſe, ut dicamus, *Theonem* conſcripſiſſe quidem commentarios in Elementa, ſed illos temporum calamitate periiſſe; quemadmodum quæ in Eundem *Pappus Alexandrinus* ſcripſerat, conſervato tamen titulo, qui poſtea *Euclidi* ipſi negligenter adjectus eſt. confer. COMMANDINUS *in Proleg. in Elem. Euclid.*

§. XXIV. Denique multi alii, & Propoſitiones, & Demonſtrationes Elementorum, prout nunc ab omnibus teruntur, *Euclidi* attribuunt,

buunt, quæque aut vera eſt, aut ſaltem veritati proxima ſententia. Graves enim & ponderoſæ ſunt rationes, quæ pro hac ſententia pugnant. Etenim PAPPUS ALEXANDRINUS, qui fere eodem ac *Theon Alexandrinus* tempore floruit, nobis autor eſt *in ſeptimo libro Collect. Mathem. pag. m.* 240. *Euclidem* Elementa tradidiſſe. Ipſe porro PAPPUS ſæpe comparat demonſtrationem ab *Euclide* traditam, cum aliorum demonſtrationibus: quod ſane fieri non potuiſſet, niſi *Euclides* & propoſitiones & Demonſtrationes ſcriptis reliquiſſet. Accedunt, quæ PROCLUS, qui longe poſt *Theonem Alexandrinum* vixit, *in comm. in Euclid.* de Demonſtrationibus Euclideis ſcripſit; cum enim in commentariis in propoſitionem decimam retuliſſet *Apollonii Pergæi* demonſtrationem, hæc ſubjungit verba, *longe melior eſt* ϛοιχειωτοῦ, (ita enim *Euclidem* appellat) *Demonſtratio, & ſimplicior, magiſque ex principiis.* Ex quibus verbis manifeſto colligimus, *Euclidis* Elementa poſt obitum *Theonis Alexandrini* ſcriptis divulgata fuiſſe. Porro DECHALES *in Tract. de progreſſu Matheſ. pag.* 12. expreſſis verbis ſcribit, quod *Proclus* & *Boëtius*, *Theone* poſteriores nonnullas Demonſtrationes referunt, prout in ipſo *Euclide* jacent; ac VOSSIUS *de Scientiis Mathematicis, cap.* XV. §. 9. cum retuliſſet, quosdam cenſere *Theonem* & concluſionum, & demonſtrationum Autorem eſſe, hæc addit verba: *Quæ ſententia eo refellitur, quod Proclus, & Boëtius; immo & Alexander Aphro-*

phrodiſeus, *qui Theone antiquior fuit*; *multa Euclidi tributa iisdem verbis*, *atque eodem ordine*, *ſub Euclidis nomine citent.* Ulterius SAVILIUS, uti narrat GREGORIUS *in præfat.* nobis teſtis eſt, quod eadem quæ nunc habemus Elementa, ſub *Euclidis* nomine, eodem ordine iisdem verbis ab univerſa Antiquitate, non ſolum *Theone* poſterioribus, verum etiam anterioribus, fuere agnita. Sic enim *Alexander Aphrodiſeus* qui circa initium Tertii ſeculi claruit, eadem quæ nunc habemus Elementa Euclidea, iisdem verbis *Euclidi* tribuit; uti & *Proclus* & *Boëtius* aliique qui poſt *Theonem* inclaruere. Quapropter veritati magis convenire videtur ea ſententia, quæ ſtatuit, quod Elementa *Euclidis* quæ poſſidemus, ac quæ hodie in manibus verſantur, ab *Euclide* ſunt adornata, quam ea, quæ à *Theone Alexandrino* ea petenda eſſe cenſet.

§. XXV. Sed cum vulgaris ſit opinio, quæ etiam multos, in viris eruditis, nacta eſt Patronos; non uti *Ramus* inepte cenſuit; *Euclidem* nec Propoſitiones nec Demonſtrationes ſcriptas tradidiſſe: verum *Euclidem* ſuorum Elementorum tam concluſiones, quam validiſſimas apodeixes ſcripto reliquiſſe; inque *Euclidem*, *Theonem Alexandrinum* commentaria ſive demonſtrationes ſcripſiſſe; quæſtio eſt, quid *Theon* in ſuis commentariis, quæ vulgo ipſius nomine circumferuntur præſtiterit, ac quænam ejus ſint partes iſtis in Elementis? At vero difficilis determi-

natu

Digitized by Google

natu illa eſt, quænam ſunt in his Elementis *Theonis* partes; cum tot diverſæ, hac ſuper re, Virorum Eruditorum ſunt ſententiæ. Si DECHALES audiamus in *Tract. de Progreſſu Matheſ. pag.* 12. ille multum tribuit *Theoni*, cum inquit, *liber Elementorum Euclidis multum debet Theoni, à quo eſt in ordinem digeſtus, & etiam auctus.* Quocum fere conſentit incertus quidam Scholiaſtes, qui uti narrat HENRICUS SAVILIUS in uno codice MSS. ad oram marginis, ad decimum tertium librum, ſcripſit; collectionem Elementorum *Euclidis*, ordinationem & diſpoſitionem *Theonis* eſſe. vid. GREGORIUS *in in Præfat. citata* Cui etiam ſententiæ ſuum adjicere calculum videtur VOSSIUS *de Scientiis Mathem. pag.* 59. ita ſcribens; *vera autem de hoc opinio eſt, quod Theon novam Euclidis editionem adornarit; in qua Euclidea & melius digeſſerit, & aliquot locis auxerit.* Neque etiam ab eadem abludere videtur COMMANDINUS *in Proleg. in Euclid. Elem.* cum ait, *Nos autem medium ſecuti, credimus libros de Elementis ſuis ornatos, Demonſtrationibus ab Euclide nobis fuiſſe relictos.* Ac poſtquam id paucis probaſſet, hæc adjungit verba; *Ut autem hoc vere aſſerimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenii virum, Euclidis Demonſtrationes fuſius, planiusque explicatas, in lucem protuliſſe.* Tandem inferius paululum hæc ſubſequuntur verba, *Sunt igitur illæ quidem Demonſtrationes Euclidis, ſed eo modo conſcriptæ, quo olim Theon Euclidem ſecutus ſuis diſcipulis explicavit.* Sed iſti opinio-

ni, qua aſſeritur *Theonem* Elementa Euclidea adornaſſe & diſpoſuiſſe, immo fuſius explicaſſe, videtur obſtare *Procli* & Antiquorum omnium autoritas. Quia iisdem verbis, ac eodem ordine, pro ut in *Euclide* exſtant, tam qui ante *Theonem*, quam qui poſt eundem claruere, Euclidea citant. Obſtat etiam mirabilis & concinna propoſitionum ſeries, ex quibus unam loco ſi eximas, tota corruat compages, & ſtructura neceſſe eſt. Potior videtur ſententia, quod Elementa græca Euclidea, quæ vulgo commentaria *Theonis* nuncupantur, quæque nunc ab omnibus teruntur, nihil aliud ſint, quam nova Editio *Euclidis*, à *Theone* adornata, nonnullis in locis ab ipſo aucta. Nam THEON *in commentariis in Almageſtum*, de Editione quadam à ſe edita loquitur; ubi ſimul mentionem injicit demonſtrationis, de ſectoribus in circulis æqualibus, quod ſint proportionales angulis ad centrum conſtitutis, à ſe factæ. Quæ etiam in omnibus Græcis Exemplaribus annectitur ultimæ propoſitioni libri ſexti. Idem judicium ferendum putat de multis in libro decimo lemmatiis *Savilius*, & fortaſſe propoſitionibus nonnullis. vid. GREGORIUS *in præfat. Forte inquit* hic inſignis Geometra, *& Definitiones quædam & Axiomata, libro Primo præpoſita, Theonem, vel alium præter Euclidem agnoſcunt autorem, ex. gr. Axioma* XI. *Nam licet Euclides hoc pronunciatum adhibeat, in Demonſtratione prop.* 29. *Elem.* I. *illud tamen pro Axiomate non habuit, ſed pro converſa prop.* 17. *utpote quæ ex illa manifeſte conſequatur.*

tur. Fortaſſe & alteræ Demonſtrationes, quæ paſſim occurrunt, ſunt etiam Theonis :, &c. Ex quibus omnibus concludit Savilius, Theonis fuiſſe partes, in Euclide paucis quidem in locis interpolando, explicando, augendo; ultra hoc nullas.

§. XXVI. Hæc vero Euclidis Elementa à multis retro ſeculis magni ſemper æſtimata fuere, cum propter claritatem probationum, quæ in iis valde elucet, tum propter demonſtrationum robur per tota Elementa diſperſum; quibus accedit quod ſit abſolutum Elementorum opus. Etenim de iis teſtatur GREGORIUS *in præfat.* ſæpe citata; *corpus illud Elementorum ea claritate, & evidentia; eo judicio, ac firmitudine; eſſe compactum; ut ſingulæ in iis propoſitiones jam à bismille annis, ab omnibus habeantur pro evidentibus, & pro talibus paſſim ab omnibus citentur.* Quam Probationum evidentiam nonnulli ſuſpicientes, firmiſſimis demonſtrationibus, quæ autore *Proclo*, nec coargui nec convinci poſſunt, omnia iſtis in Elementis occurrentia, munita eſſe, apud animum penſitantes Veteres quidam; anſam inde affirmandi, *Euclidem errare non poſſe*, nacti ſunt. Quæ licet de mortali nimis ſuperbe dicta, aliquantum conniveri poſſunt, ſi de Mathematicis *Euclidis* demonſtrationibus tantum intelligantur. Præclarum eſt enim Teſtimonium PETRI RAMI, cæteroquin ſeveri *Euclidis* caſtigatoris, de Euclideis Probationibus: dicens, *nullus paralogiſmus*, *nulla* ψευδογραφια

in totis Elementis, *nobis quanquam ſevere inquirentibus*, *animadverti potuit* : *quam laudem eſſe ſingularem profiteor* ; *quamquam nulli adhuc*, *neque Grammatico*, *neque Rhetori*, *neque Logico concedere potui*, *ut in Grammatica*, *Rhetorica*, *Logica nihil falſi docuiſſet.* Hæc itidem Demonſtrationum, invicta firmitas, & concluſionum abſoluta perfectio, forte etiam in cauſa fuit; cur nonnulli in *Euclidis* vocabulo Myſterium quaſi aliquod latitare opinati ſunt ; cum vocabuli *Euclidis* Etymon ex græca lingua derivandum cenſent ; putantes illud ex Græco εὖ, quod *benè* denotat, & κλείω *claudo*, eſſe compoſitum ; idemque denotaret *Euclidis* vocabulum, quaſi quis diceret *bene claudens*, ſeu *bene concludens.* Licet vero *Euclidis* Demonſtrationes firmiſſimas eſſe agnoſcamus ; non tamen exiſtimarem eam ob rationem Antiquitatem eum nomine eo inſignaviſſe, cum multi ante & poſt eum extiterint *Euclides*, in quas illa Etymologica derivatio non quadrat. Eſt ſane eligans Elogium, quod de his Elementis verba faciens, recitat CARDANUS *de mira ſubtilitate lib.* 13. dum ſcribit, *Quorum inconcuſſa dogmatum firmitas*, *perfectioque abſoluta adeo*, *ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat*, *ut ſoli hi in arduis quæſtionibus videantur poſſe à vero falſum diſcernere*, *qui Euclidem habent familiarem.* Audiri etiam meretur CLAVIUS, *in prolegomenis*, aſſerens ; *Euclidis Elementa ſemper magni æſtimata*, *neque ullus ante eum par ei extiterit*, *licet non pauci ante Eum Elementa* con-

conſcripſere teſte Proclo. Quin & teſte VERULAMIO *de Augmento ſcientiarum lib.* 3. *Euclidis abſolutum adeo eſt opus Elementorum, ut Euclideis laboribus in Geometricis nihil additum ſit à ſequentibus, quod intervallo tot ſeculorum dignum ſit.* Quare RAMUS *in libro tertio Scholæ Mathematicæ* notat. *Duo fere millia Annorum exiſtimatur toto terrarum orbe ab omni reprehenſione liber & ſacro ſanctus fuiſſe Euclides, & ſi quid poſt homines natos ſolidæ ſcientiæ comprehenſum & animadverſum eſt, id Eucli acceptum refertur.* Ut autem aliorum de *Euclidis* Elementis Teſtimonia ſilentio præteream, unicum adhuc adducere haud incongruum eſſe opinor; illudque ſumam à GREGORIO ABULPHARAIO, *quod in Hiſtoria compend. Dynaſtarum.* ſuper Elementis Euclidis dicit. Sic enim ibidem loquitur Scriptor ille Arabs; *Quod Euclidis liber qui vocatur* ϛοιχεια *celebris admodum eſt, & utilis; ac quod non eſt Græcis hoc in genere liber alius generalis, neque ſecutus eſt eum aliquis, qui non veſtigia ejus ſectatus eſt; idemque quod ille dixerit; nec inter homines, qui præſtantiam ipſius confeſſus ſit, vel multiplicis ejus Doctrinæ teſtimonium perhibuerit.*

§. XXVII. Opus hocce Euclideum ſua inſcriptione etiam videtur ornatum fuiſſe: ex *Commandini* mente *Proclus* in fronte ejus Legiſſe cenſetur, ευκλειδȣ ϛοιχειωσις; ſeu *Euclidis Elementaris inſtitutio.* VOSSIUS vero *de Scientiis Mathematicis cap.* 15. §. 2. inſcriptum illum librum fuiſſe putat, ϛοιχειων βιβλιον, *Elementorum*

terum libros, vel ϛοιχειωσιν, *Elementorum Doctrinam*; omiſſo Geometriæ vocabulo, cum tamen Geometrica ſignificare vellet ϛοιχεία. Alii vero codices inſcribuntur. Ευκλειδȣ ϛοιχειων βιβλ. ιε, εκ των Θεωνος συνουσιων. Quæ tamen verba ex *Theonis Colloquiis*, deinde ſunt adjecta, non à *Theone* ipſo uti exiſtimat COMMANDINUS *in præfat.* ſæpe *citata*, *verum à quodam Theonis familiari, Viro plane erudito, qui nobis Euclidem, eo quo nunc habetur modo legendum conceſſit.* Neque etiam hæc verba in Vetuſtiſſimis reperiuntur Manuſcriptis; uti ante ex SAVILIO notavimus. Mirabuntur forſan multi *Euclidis* Inſcriptionem Legentes, Eum tantum opus ſuum appellaſſe ϛοιχεìα, *Elementa*: non vero Geometriæ Elementa, quemadmodum hoc Elementare corpus poſtea à Latinis ita eſt inſcriptum; cum illud vocabulum de multis dici poſſit, uti de litterarum principiis, de rebus naturalibus, ac de multis aliis. Quare primo inſpicientem, ac ϛοιχεια in titulo legentem, penitus dubium relinqueret, de quanam materia iſtis in Elementis tractetur. Verum non absque ratione, *Euclides* tantum ϛοιχεια librum ſuum inſcripſiſſe cenſendus eſt, omiſſo Geometriæ vocabulo. Nam prætterquam quod ex primis verbis hujus operis, in quibus à puncto initium facit; quanam de re iſto in libro tractetur, cuilibet legenti ſtatim innoteſcit; eo præterea tempore, quo *Euclidis* hæc conſcripſit, Geometriæ ſtudium, erat maxime Elementale & fundamentale; cum fere juventus omnis Græca pri-

primos ſuos conatus in Geometriæ ſtudio exercendo inſtituerit; ac una cum primis cognitionis principiis hanc Doctrinam conjunxerit; nemini Elementa Legenti incognitum eſſe potuit; cum frequens & percelebre tunc temporis erat Geometriæ exercitium; quonam de ſubjecto in ſuis Elementis ageret *Euclides*; ac quodnam Thema in iis proponeret. Si non aliæ acceſſerint rationes, quæ *Euclidem* Virum acutiſſimi ingenii permoverint, ſuum opus tantum Elementum nuncupare. Si ante dicta penſitemus; hæc ϛοιχεια ſunt multorum de re Geometrica optime meritorum Scriptorum principia & fundamenta. Ea ſunt fontes & ſcaturigines ex quibus tot effluxere Geometriæ rivuli. Ea ſunt fundamenta firma, quibus tot Geometræ Veteres ſuum Mathematicum ædificium ſuperſtruxere; ac adhuc hodie Recenſiores ſuper iis condunt. Ea ſunt tot Elementa quotquot præclara habemus opera Geometrica. Forte etiam in genere dixit ſuum opus ϛοιχεια, non ad Geometriam tantum, ſed ad alias quaſcunque intellectum perficientes & ornantes Scientias ſeſe extendentia. Forte plura ſub iſto Elementorum vocabulo intellexit. *Commandinus* vero per excellentiam quandam hanc inſcriptionem de Geometria intelligendam eſſe putat: idemque eſſet ac Oratorem dicentes *Demoſthenem*; Poëtam *Homerum* vel *Virgilium* intelligimus; ſic etiam Elementa dicentes, Geometrica intelligenda eſſe, exiſtimat.

 §. XXVIII.

§. XXVIII. Sunt interim quidam; qui Geometriæ nomen Euclideis Elementis concedere nimis religioſi ſunt, exiſtimantes Geometriæ ſcientiam eſſe univerſaliorem quam his docetur Elementis; ac propterea inepte hæc Elementa dici Geometriæ Elementa, potius ſervandum eſſe vocabulum Elementum, quam ea Geometriæ Elementa inſcribere. Alii vero putant, jure optimo hæc Elementa, Geometriæ Elementa appellari. Cum Elementa *Proclo* autore dicuntur ea, quorum contemplatio ad aliorum pertinet ſcientiam, & ex quibus apparet ſolutio eorum, quæ in ipſis dubitare contingit: vel uti ait *Menechmus:* Elementum dicitur, in quod cum ſit magis ſimplex compoſitum reſolvitur; conferantur COMMANDINI *Prolegomena.* Jam vero hæc noſtra Euclidea talia ſunt Geometriæ Elementa, in eorum enim contemplatione ſolutionem acquirimus illorum, quæ in aliis dubitare contingit; ex iis namque profluxit, quodcunque excellens Geometriæ inventum, quod Autoris famam quam maxime longam effecit, iisque tanquam certis innititur principiis. Ex iis hauritur, & intelligitur, quidquid ad ſolidam Geometriæ notitiam requiritur: ſine horum ſcientia, fruſtra tentant Mathematicorum tam Veterum quam Recentiorum ſtupenda aggredi opera; quæ ex his Elementis lucem foenerantur. Utuntur itidem Matheſeos Scriptores Veteres in ſuis Demonſtrationibus his *Euclideis* Elementis tan-

quam

quam principiis, ita ut eorum de rebus Geometricis Theoremata & Problemata in hæc noſtra reſolvantur Elementa; ac ex his reliquæ Matheſeos partes fluant. Videantur CLAVII *Prolegomena.* Verum quidem eſt, *Euclidem* ſuo in opere Geometrico non diſertis verbis pertractaſſe omnia ad rem Geometricam pertinentia, ſed uti ait CLAVIUS *loc. cit.* quæ viſa ſunt neceſſaria, atque utilia ad communem utilitatem; vel uti loqui amat COMMANDINUS, quæ Elementali tradere potuit ordine. Id autem non tollit, quo minus tamen hæc Elementa, Geometriæ nomen gerant; cum quidquid in Geometria docetur, ex his facile derivari poſſit Elementis. Nullum enim hucusque eſt in Geometria inventum; quin natales ſuos Euclideis debet Elementis, in iis ſua habet principia & fundamenta, ſine quibus nec intelligi nec demonſtrari poſſunt.

§. XXIX. Ejusmodi Elementorum *Euclidis* conſpectus, protinus nobis neceſſitatem quandam, ad ea Elementa cognoſcenda, inſinuat. Si enim perpendamus Elementa hæc ad univerſam Geometriam eſſe neceſſaria; quis iis, qui Geometrica imbui ſcientia ſtudet, carere poſſit? Si teſte COMMANDINO principaliſſima, ſimpliciſſimaque, ac primis principiis maxime affinia Theoremata Geometriæ iis in Elementis contineantur: Quis cognitionis Geometricæ avidus, non omnium primo hæc Elementa conſulere teneatur? Ea ante omnia eum tractare oportet,

portet, qui in Geometricis Scientiis ſe erudiri velit; in iis ſe exercere, is debet, qui altiora cupit; ac Veterum & recentiorum Mathematicorum ſcripta intelligere percupit. Vel uti ait CLAVIUS *in proleg. citatis*, *ſicuti is qui legere vult*, *Elementa literarum diſcit prius*, *& illis aſſidue repetitis utitur in vocabulis omnibus exprimendis: ſic qui alias diſciplinas Mathematicas ſibi reddere deſiderat familiares*, *Elementa hæc Geometrica plene ac perfecte prius calleat neceſſe eſt.* Fruſtra enim tentant Mathematicorum opera aggredi, qui hiſce principiis non ſatis ſunt muniti. Scriptores enim illi *Euclidis* demonſtrationibus, tanquam fundamentis utuntur; ac teſtatur CLAVIUS ſibi longa diuturnaque Experientia compertum eſſe, *eam eſſe neceſſitatem Elementorum Euclidis*, *ut fruſtra quiſquam ſe ſperet ſine illorum præſidio*, *Ariſtarchi*, *Archimedis*, *Apollonii*, *Theodoſii*, *Autolyci*, *Menelai*, *Ptolemai*, *Pappi*, *Sereni*, *Aliorum Celebrium Mathematicorum Demonſtrationes intelligere* vid. COMMANDINUS *in Prolegom.* Immo cum hæc Elementa Univerſæ Geometriæ tradunt principia, ſine quibus nec ſciri nec percipi rite poſſunt abſtruſiora iſtius ſcientiæ Theoremata ac Problemata; quis non mecum fateri tenetur Elementa hæc Geometriæ ſtudioſis ſcitu perquam neceſſaria eſſe?

§. XXX. Quanti olim neceſſitatis & utilitatis *Euclidis* Elementa, ut rite ſtudioſa juventus iis imbueretur, habita ſunt, ſatis declarant Profeſſiones Euclideæ, quæ antea

in

Digitized by Google

in Academiis & Gymnaſiis fuere. Etenim creati fuere Profeſſores, quibus Euclidea exponere Elementa, demandatum erat. Sic enim refert DECHALES *in tract de Progreſ. Matheſ. cap.* 2. *pag.* 14. quod *Joannes Scheubelius* in Academia Tubingenſi Euclidis Profeſſor fuerit ordinarius; ac teſtatur CONRADUS DASYPODIUS *in præfat. in lib.* 1. *Euclidis*; primum illum librum in omnibus fere Gymnaſiis prælectum fuiſſe; inque Schola Argentinenſi, iis, qui ſunt in prima curia propoſitum. Porro etiam notat SAMUEL REYHERUS *in diſſert. de Euclide, cap.* 2. Lipſiæ olim moris fuiſſe, ut ſummos in Philoſophica facultate honores ambientes, ſpeciminis Mathematici loco *propoſitionem* 47. *Elem.* 1. demonſtrent, & propterea hanc propoſitionem dictam magiſtralem fuiſſe, illosque qui rite dictum Theorema demonſtrare potuerunt, Magiſterii titulo dignos fuiſſe habitos. Ac ni fallor in Academiis Patriæ noſtræ, ſi non in omnibus, ſaltem in quam plurimis, conſtitutum eſt, ut, qui ad lauream Doctoralem Philoſophiæ adſpirant, Propoſitionem unam, vel duas, ex Elementis Euclidis, quibus ſuorum in Matheſi profectuum ſpecimina dant, deſumtas demonſtrent.

§. XXXI. Maximis laudibus *Euclidis* in Geometria peritiam ornant tam Antiqui quam Neoterici Matheſeos Scriptores. Ne autem omnia commemorem, pauca quædam hic tantum adducam; & quidem è Veteribus PAPPI

PAPPI ALEXANDRINI teſtimonium, tanquam ſufficiens, referam. Scribit enim clarus hic Geometra *in lib.* 7. *Collectionum Mathem. Quod Euclides operam dans diſcipulis Alexandriæ, longo tempore adeo excellentem in Mathematicis habitum ſit aſſecutus, ut nunquam fuerit deceptus.* Ex Recentioribus CLAVIUS *in Proleg. in Euclid.* audiendus eſt; qui inquit, *noſter Geometra acutiſſimus, cum in Doctrina Academicorum, eſſet ſumma cum laude verſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium judicio principem inter Mathematicos ſibi locum jure optimo vindicarit.* Vocatur idcirco à SAVILIO *inſignis Geometra*, ac à DECHALES *ſummus Geometra.* COMMANDINUS vero *in Euclidem, in proleg.* dicit, *quod Matheſin ita præclaro animi impetu eſt aggreſſus, ut progreſſus admirabiles, ac ſempiterna ævi memoria digniſſimos in ea fecerit; conſtantique omnium Doctorum teſtimonio Geometrarum princeps habitus ſit; immo majorem ſemper conſecutus eſt laudem, quam omnes illi qui ante eum vixere.*

§. XXXII. Quanti etiam ſemper, per totum terrarum orbem, æſtimata fuere, & hodie ubique æſtimentur *Euclidis* noſtri *Elementa*; quæ ſuper Geometrica Doctrina conſcripſit; abunde teſtantur, tum *Commentaria* à multis Viris eruditis in Elementa Euclidea adornata; tum *Editiones* illæ multiplices, quibus innumeris in locis eadem lucem adſpexere. Ea vero quæ colligere potui, hic com-

Digitized by Google

commemorare non inutile fore duxi. Ad id autem efficiendum imprimis uſus fui laboribus FABRICII *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* XIV· & M. GEORGII MATHIÆ BOSE *in Schediaſmate literario, de variis Elementorum Euclidis Editionibus*, in quo partim de ſe, partim è WOLFIO recenſet Editiones à FABRICIO omiſſas. In hoc catalogo & Commentariorum, & Editionum adornando, hunc tenui ordinem, ut pro annorum numero, quo prodirere, ſe mutuo ſequantur.

Inter omnes, qui Euclidis Elementa commentariis ſuis illuſtrare conati fuere, Antiquiſſimus eſſe videtur THEON ALEXANDRINUS.

(Secundo loco commemorandus eſt PROCLUS DIADOCHUS, cujus commentarium latinitate donavit FRANCISCUS BAROCIUS.)

BOËTHIUS *Euclidem* tranſlatum in Romanam Linguam dedit, quæ inter Boëthii opera hodie exſtant, ac inſcribitur *Euclidis Megarenſis Geometria ab Anit. Manl. Severin. Boëthio tranſlatus.* Operum *pag. m.* 1179. ubi tantum propoſitiones ſine demonſtrationibus exſtant.

Verum *Euclidem* Latini prius ex Atabico tranſlatum habuere, quam ex Græco fonte. Nam JOANNES CAMPANUS qui vixit circa ſalutis annum MI. uti Autor eſt *Raphaël Volaterranus*; vel anno Domini CIƆXXX. uti cenſet *Tritbemius*, ex Arabico in Latinum vertit. Illa autem verſio reprehenditur

à

Digitized by Google

à CLAVIO *in præfat. in Euclid.* Quod *Campanus* in omnibus ſecutus ſit, traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, & Methodum perverterunt, verbaque Propoſitionum ejusdem locis non paucis immutarunt; ut verus, germanusque Authoris ſenſus, perdifficile poſſit intelligi. Vid. VOSSIUS *de Scient. Mathem. pag.* 61. 62.

Pariter ATHELARDUS, ſive ADELARDUS, Anglus, Monachus Bathonienſis *Euclidis* Geometriam ex Arabico tranſtulit Latinè Anno CIƆCXXX.

Vetuſtiſſimum Elementorum Typis exſcriptorum exemplum eſſe videtur, quod prodiit græce & latine ſub titulo. *Euclidis opus Elementorum in* XV. *libros diviſum, cum Commentariis Campani, & Præfatione Erhardi Radholt, Auguſtani, ad Johannem Mocenicum, Urbis Venetæ Principem*; editum Venetiis, per dictum RADHOLTUM anno 1482. Cujus Editionis meminit CORNELIUS à BEUGHEM *in incunabulis Typographiæ.*

Prodiere libri XIII. latine, ex verſione, & cum Commentario LUCÆ PACIOLÆ DE BURGO. Venet. 1489. fol.

Euclidis Elementa Latine, cum commentariis *Campani*; per LEONARDUM de Baſilea, & GULIELMUM de Papia, ſocios; 20. Cal. Jun. edita ſunt Vicent. 1491. fol.

ZAMBERTUS vertit libros. XIII. ſub titulo Elementorum *Euclidis* ex traditione *Pappi* Philoſophi, quæ verſio prodierat. Venet. 1505. fol.

AM-

Digitized by Google

AMBROSIUS LACHER DE MERSPURGK Conſtanci diocesis Arcium liberalium Magiſter, ſacreque Mathematice ſtudii noſtri Ordinarius in Achademia Franckfordiana. *Euclidem* edidit anno 1506. 4, plagulis novem; *Campanum* ſequitur. Non tamen niſi quatuor priores libros comparare in hoc volumine voluit Autor.

Textus de ſphæra *Johannis de Sacroboſco*, & Geometria *Euclidis Megarenſis*. Præmittitur *Jacobi Fabri ſtapulen.* Præfatio ad ſplendidum virum *Carolum Borram* Theſaurarium Regium; tribus ultimis paginis habes libros quatuor Geometriæ *Euclidis* à *Boëtio* in Latinum translatos. In fine exſtat. Impreſſum Pariſii in officina *Henrici Stephani* è regione ſchole decretorum ſita. Anno Chriſti Syderum conditoris 1507. fol.

LUCAS PACIOLUS, Elementorum libros XV. interprete *Campano*, edidit, Venet. 1509. in fol. impreſſi ſunt apud *Paganinum Paganinum*, ac dedicati *Cardinali Volaterrano*.

Latine prodiere *Euclidis* Elementorum libri XV. interprete CAMPANO; & libri XIII. interprete BARTHOLOMÆO ZAMBERTO Veneto, Pariſiis 1516. apud *H. Stephanum* avum, fol. una cum aliis *Euclidis* ſcriptis Baſiliæ. 1537. & 1546. fol.

ORONTIUS FINÆUS latine commentatus eſt in VI. priores *Euclidis* libros, qui prodiit Pariſiis. 1530.

Euclidis Elementa vulgata ſunt Græcè hoc titulo, εὐκλείδου στοιχείων βιβλία ιέ ἐκ τῶν Θεω-

νος

νος συνουσιῶν. Baſiliæ 1533. apud *Joannem Hervagium*, fol. edente SIMONE GRYNÆO, è duobus codicibus MSS. Quorum alterum Venetiis *Lazarus Bayſius*, alterum Pariſiis *Johannis Ruellius* ſuppeditaverat. Additi etiam in illa editione, itidem Græce, è codice Oxonienſi *Joh. Claymundi* ſunt, ſed admodum inemendate, Commentariorum libri quatuor, Autore *Proclo* Philoſopho.

Euclidis Elementorum libri Græcè tum Florentiæ, tum Romæ, excuſi ſunt. 1545. 8.

JOHAN SCHEUBEL. Profeſſor Euclidis Tubingæ, latine edidit VI. priores libros in quorum figuris nullæ literæ. Baſileæ 1550. fol.

Libri VI. priores latine prodiere cum Demonſtrationibus ORONTII FINÆI Pariſiis apud Simon. Colineum. 1551. 4.

Libri XV. Græce & Latine excuſi ſunt cum præfatione *Stephani Graclis*. Pariſiis 1557. 1573. & 1598. 8.

JACOBUS PELETARIUS libros VI. Priores latine edidit cum ſuis demonſtrationibus fol. Anno 1557.

FRANCISCUS BAROCCIUS, *Procli* libros quatuor commentariorum in Euclidem, cum ſcholiis & figuris latine tantum edidit. Patavii. 1560.

WILHELM HOLTZMAM (*Guil. Xylandri*) libri ſex priores Germanicè edidit Baſel apud. J. *Operinum* 1562. fol.

Hanc ſex priorum librorum, verſionem Xylandri, JOHAN PETERSZ. DOU in Bel-

Belgicam Linguam tranſtulit. 1606. quæ verſio iterum in Germanicam Linguam tranſlata eſt à SEBASTIANO CURTIO.

Libri XIII. Græcè & Latinè ex Editione CONRADI DASYPODII Argent. 1564. 8. additis, ad librum primum & ſecundum tantum, *Theonis* commentariis, & ad ſecundum *Barlaami* Monachi Demonſtrationibus, quibus ad numeros applicat, quæ de Lineis ac figuris planis *Euclides* docuerat.

Libri. XV. Italice verſi & Explicati à NICOLAO TARTAGLIA. Venet. 1565. 4. & cum Commentario *Campani* itidem in lingua Italica Venet. 1569. fol. Cum ſcholiis antiquis incerti Autoris correcti & illuſtrati à FREDRICO COMMANDINO 1575. fol. & Piſauri. 1619. itidem Italice primi ſex libri Mediolani. 8.

ARNOLDUS LENSÆUS Iſagogen in Elementa *Euclidis* compoſuit. Antw. 1565. 8.

CHRISTIANUS HERLINUS, & CONRADUS DASYPODIUS, publicarunt Argentinæ 1566. fol. Analyſes Geometricas VI. librorum *Euclidis*; ubi propoſitiones, Græcè, Demonſtrationes, mere latine.

Libri XV. latine demonſtrati à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA, & libro XVI. per ipſum addito aucti; de ſolidorum regularium inter ſe invicem collatione, itemque XVII. de compoſitis regularibus. Pariſiis 1566. fol. & 1578. fol.

Euclidis Elementa cum notis H. BILLINGSLEY & præfat. *Joh. Dee* Londinenſis 1570. Lond. fol. idiomate anglicano apparuere. ****** CON-

CONRADUS DASYPODIUS inter alia *Euclidis* opera libros XV. Elementorum edidit Argent. 1571. 8. in ea editione nudæ propoſitiones græce & latine reperiuntur. Edidit & eodem anno librum primum *Theonis* commentariis illuſtratum græce, cum latina perſpicua interpretatione, & *Heronis* vocabulis Geometricis.

FREDRICUS COMMANDINUS libros XV. Euclidis latine vertit, & cum ſuis commentariis edidit, Piſauri 1572. & 1619. fol.

FRANCISCUS MAUROLYCUS Opuſcula Mathematica Venetiis 1575. 4. edidit, in quibus Theoremata XIIItii Elementi.

Per CONRADUM DASYPODIUM libri VI. latine in lucem editi, cum Scholiis *Iſaaci* Monachi Argentorati. 1579. 8.

CHRISTOPHORUS CLAVIUS libros XV. latine cum ſcholiis & commentariis inſignibus edidit Coloniæ 1591. fol. Romæ 1603. 2 Tom. in 8. Francofurti 1607. 8. ac inter opera ejus Mathematica Moguntiæ. 1612. fol. iterum Coloniæ 1627. 8. prodiit, in quorum decimo quarto & quinto, *Campanum* imitatur, *Fluſſatis* decimum ſextum addit, ubi 31. Theoromatibus, ac 5. problematibus quinque corpora, variè ſibi inſcripta & circumſcripta conſiderantur; ad modum tamen *Daſypodii* propoſitiones ſolas, absque Demonſtrationibus oſtendit. Alia iterum *Clavii* editio prodiit Francofurti 1654. 2. Tom. in 8.

NASIRIDINUS TUSINUS Perſa Euclidis

dis libros XIII. Arabicè vertit; quæ verſio luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ 1594. fol. ex Typographia Medicea.

Excuſus eſt Typis *Euclides* Coloniæ 1600. 8. In hac ſolæ Euclideæ Propoſitiones abſque Demonſtratione reperiuntur; præfixa eſt præfatio *Gracilis*.

CHRISTOPHORUS DIBAUDIUS latine Demonſtrationem dedit linealem VI. priorum librorum. Arnhemiæ 1603. 4. eorumdemque demonſtrationem numeralem. Lugd. Bat. 1603. Lib. VII. VIII. IX. Demonſtrationem Arnhemiæ 1605. libri X. ſeu Arithmeticæ irrationalium, demonſtrationem Linealem & numeralem. ibid. eod.

AMBROSIUS RHODIUS XIII. libros latine demonſtravit Witeb. 1609. 8. 1634. 1661.

SIMON MARIUS, Germanice VI. priores *Euclidis* libros demonſtratos dedit, Onoldi. 1610. fol.

FLORIMUNDUS PUTEANUS librum *Euclidis* decimum cum commentariis edidit Pariſiis. 1612. fol.

JOH. CHRIST. KNOPFF. libros duos priores, cum explicatione JOH. PAULI RESENI edidit Witteb. 1612. 8.

DOUNOT DE BAR-LE DUC. Gallice *Euclidis* Elementa vertit, Paris. 1613. 4. m. In libro decimo ordo turbatus, ut in Heruagiana latina editione in libris 5. 14. & 15. *Euclidem* ſtricte ſequitur.

D. HENRION libros. XV. in Linguam

Gallicam verſus eſt, Paris. 1615. 8. (& 1632. in 4ta) ac 1631. 8.

Libri VI. priores cum commentario JOH. LANZ. S. J. prodiere Ingolſt. 1617. 8.

SEBASTIANUS CURTIUS Germanicam paravit Editionem Amſt. 1618. 4. item 1634. 8. m.

Libri XIII. Lond. 1620. fol. græce & latine prodiere, nitida editio, cum *Commandini* verſione, adjectis figuris accuratis.

CAROLUS MALAPERTIUS. libros. VI. priores latine demonſtravit. Duaci 1625. 12.

M. LUCAS BRUNN. Germanice *Euclidis* Elementa practica, oder auszug aller Problematum, und handarbeiten, aus den XV. büchern *Euclidis*. Norimb. 1625. 4. Definitiones nullæ, Theoremata nulla, ſed nudæ Problematum ſolutiones.

PETRUS HERIGONIUS Gallice libros VI. priores vertit, ac edidit Paris. 1644. 8. & libros. XV. latine, & Gallice: in Tom. 1. Curſus Mathematici Paris. 1644. 8. m.

MARIUS MERSENNUS libros. VIII. latine in Synopſi ſua Mathematica demonſtratos dedit Paris. 1644. 4.

CLAUDIUS RICHARDUS latine in libros. XIII. commentatus eſt, Antwerp. 1645. fol.

MARIUS BETTINUS in Ærario Mathematico, Prolixos commentarios in VI. priores libros Euclidis dedit; Bononiæ. 1648. 3. Tom. 4.

GEORGIUS FORNIER latine demonſtra-

Digitized by Google

ſtravit VI. libros priores. Lond. 1654. 12. & ſecunda editio Paris. 1654. 24.

ANDREAS TACQUET Elementa Geometrica Euclidea edidit Antwerp. 1654. 8. ac Amſtel. 1701. 8. & cura WHISTONI recenſita & locupletata eſt, Cantabrigiæ 1703. 8. (eadem recuſa Amſtel. 1725.) in quibus. VI. priores & XI. XII. continentur libri.

ISAACUS BARROUW librorum XV. editionem latinam paravit Cantabr. 1655. 8. Lond. 1659. 1678. Marburg. 1675. 8.

JOH. ALPHONSUS BORELLUS Euclidem reſtitutum, ſive priſcæ Geometriæ Elementa brevius & facillius contexta elaboravit. Piſis. 1658. 4. Romæ 1679. 12.

CASPARUS SCHOTTUS libros VI. priores edidit in curſu Mathematico Herbip. 1662. Franc. 1674. & Bamb. 1677. fol.

CHRISTIANUS MELDER VI. priores Euclidis libros edi curavit Lugd. Bat. & Amſtel. 1673. 12. *Furnierio* ſe multa debere ipſe agnoſcit.

CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES XIV. libros Elementorum edidit in mundo Mathematico, ejusque Tom. I. qui prodiit. 1674. nec non poſt Autoris obitum, editore *Amato Varcino*. Lugd. 1690. fol. (Gallice vero libros. VI. priores cum. XI. & XII. Paris. 1683. in 12.)

(Liber 5. Elementorum Euclidis explicatus ſecundum Doctrinam Gallilæi, à VINCENTIO VIVIANI Florentiæ 1674. 4.)

Euclidis Elementa Geometrica, novo or-

dine ac Methodo fere demonſtrata, una cum *Nicolai Mercatoris* in Geometriam Introductione brevi. Lond. 1678. 12. Autor miſſo ordine Geometræ, in margine expreſſit librum, & numerum propoſitionis ex ordine *Euclidis*.

JONAS MOORE anglice libros VI. priores cum XI. & XII. edidit, in the new ſyſteme of the Mathematicks. Lond. 1681. 4.

HENRICUS COETS latine VI. priores libros demonſtravit Lugd. Bat. 1691. 8. & Amſtel. 1705. 8.

A. E. B. V. P. Teutſch Redender Euclides, oder acht Bücker (1-6. ac 11. & 12.) von denen anfängen des Meſſkunſt. Wien. 1694. 4.

OZANAM in curſu Mathematico libros. VI. priores, una cum XI. & XII. Gallice interpretatus eſt, Paris. 1697. qui recuſus Paris. 1699.

SAMUEL REYHERUS, germanice VI. priores libros edidit, Kiel. 1697. 4.

HENRICUS MEISNERUS Hamburgi Elementa *Euclidis* edere coepit Græcè & Germanicè, cum uberrimis Commentariis, itidem Germanicis A. 1699. fol. ſed non editis ultra librum ſecundum.

DAVID GREGORIUS Græcè & Latinè libros XV. Euclidis recenſuit, ac edidit Oxoniæ 1703. fol. è Theatro Sheldoniano. nitidiſſima Editio.

JACOBUS GOODEN ex *Euclide* præcipua collegit Theoremata, ac edidit. Leod. 1704. 8.

Decha-

Dechales par OZANAM Paris. 1709. 12. m.

The Elements of Euclid, With ſelect. Theorems out of Archimedes by the Learned Audrew Taquet, by WILLIAM WHISTON. the third edition Lond. 1714. 8. m.

JOANNES KEIL, ex verſione *Commandini* libros VI. priores cum. XI. & XII. imprimi curavit. Oxon. 1715. 8.

P. JACOB KRESA *Euclidem* in linguam Hiſpanicam traduxiſſe fertur, in literariis novis Germanice 1721.

SAMUEL CUNN Keilianam editionem anglice traduxit Lond. 1723. 8.

Demonſtration univerſelle des converſes d'Euclide par Mr. SELLIER 1723.

Prodiit apud Woodward tomus ſecundus Elementorum Euclidis, ex editione *Gregorii* in linguam Anglicam verſorum, per EDMUNDUM ROVAN 1732.

Euclids Elements of Geometry, from the Latin tranſlation of *Commandine*, by Dr. *John. Keill*, tranſlated by *Samuël Cunn*, carefully reviſed an corrected by JOHN. HOM. the third. edition. 1733.

Præter has *Euclidis* Editiones etiam recenſentur Elmenta *Euclidis* Arabice verſa à THEBETO.

Perſicam verſionem Bodlejana; *Syriacam* Cantabrigienſis Bibliotheca ſervat.

Libri VII. ex Arabico Ebraicè verſi à JOH. JACOBO MECHIR.

Alia Hebraica verſio R. MOSIS ABEN TIBBON. Quam verſionem *Buxtorfius* Mon-

Digitized by Google

ſpeſſuli. A. C. 1210. factam eſſe teſtatur vid. WOLFII. *Biblioth. Hebrææ part.* 1. *pag.* 133.

Denique Sinice, ac Tartarice *Euclidis* Elementa verſa ſunt.

Plantavitius Romæ in Bibliotheca Medicea præclariſſimum Euclidis Exemplar Hebræum vidiſſe ſe ait, magnis in folio membranis, iisque terſiſſimis, nobilique charactere, & auctario duorum librorum, qui non exſtent in Græcis & Latinis exemplaribus uti refert WOLFIUS *in Biblioth. Hebrææ part.* 1. *pag.* 133. ſunt & alia exemplaria Hebraica quæ à Wolfio loco citato enumerantur.

Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTUM PRIMUM.

TOtus hic primus liber in eo poſitus eſt, ut nobis tradat ortus proprietateſque triangulorum, tum quod ad eorum angulos ſpectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter ſe comparat interdum, interdum vero unumquodque per ſe inſpicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos conſiderat, aliquando vero ex angulis latera, ſecundum æqualitatem atque inæqualitatem, rimatur. Idemque variis rationibus inquirit, in duobus quandoque triangulis inter ſe collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumque comtemplationem aggreditur, tum inter ſe, tum etiam, ut cum triangulis inter eaſdem parallelas conſtitutis conferuntur. Ut autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diviſionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, conſtitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia hujuſmodi. Itaque ut uno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli ſententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atque parallelogramma.

Digitized by Google

DEFINITIO I.

Punctum eſt, cujus pars nulla eſt.

ANte omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propoſitam exorditur à principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, ſi prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, unas ſecundum longitudinem, alteras ſecundum latitudinem, & ſecundum profunditatem altitudinemve alteras. Itaque quod in quantitate continua, ſive magnitudine exiſtit, intelligiturque ſine omni parte, ita ut neque longum, neque latum, neque profundum eſſe cogitetur, id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum.

DEFINITIO II.

Linea verò, longitudo latitudinis expers.

DEfinit hic lineam, primam ſpeciem magnitudinis, quam dicit eſſe quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam.

Mathematici, ut nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum jam deſcriptum ſuperiore definitione, è loco in locum moveri. Cum enim punctum ſit prorſus individuum, relinquetur ex iſto motu imaginario veſtigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Ut ſi punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, veſtigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere intervallum inter duo puncta A, & B, comprehenſum ſit longitudo quædam

TAB. I. fig. 1.

dam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni privatum dimenſione, eam efficere nulla ratione potuerit.

DEFINITIO. III.

Lineæ autem termini, ſunt puncta.

Docet quod linea qualibet habens extrema, in ſuis extremitatibus puncta recipiat. Ut linea AB, extrema habet puncta A, & B. *TAB. I fig. 1*

DEFINITIO. IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſua interjacet puncta.

Hoc eſt, in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc, atque illuc deflectendo ſubſultat; in qua denique nihil flexuoſum reperitur.

Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt deſcribi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti, qualitatem lineæ deſcriptæ intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur per breviſſimum ſpatium, ita ut neque in hanc partem, neque in illam deflectat, ſed æquabilem quendam motum, atque inceſſum teneat, dicetur linea illa deſcripta, Recta.

DEFINITIO. V.

Superficies eſt, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

Poſt lineam, quæ eſt prima quantitatis continuæ ſpecies, unicamque habet dimenſionem, definit

ſuperficiem, quæ ſecundam magnitudinis ſpeciem conſtituit, additque primæ dimenſioni ſecundum longitudinem, alteram ſecundum latitudinem. Nam in ſuperficie reperitur, non ſolum longitudo, ut in linea, verum etiam latitudo, ſine tamen omni profunditate. Ut quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehenſa, conſiderataque ſecundum longitudinem AB, vel CD, & ſecundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur ſuperficies.

TAB. I. fig. 2.

Mathematici vero, ut nobis eam ob oculos ponant, monent, ut intelligamus lineam aliquam in tranſverſum moveri: Veſtigium enim relictum ex ipſo motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in tranſverſum eſt factus; nulla vero ratione profundum eſſe poterit, cum linea ipſum deſcribens omni careat profunditate; quare ſuperficies dicetur. Ut ſi linea AB, fluat verſus DC, efficietur ſuperficies ABCD.

DEFINITIO. VI.

Superficiei autem extrema, ſunt lineæ.

NOn diſſimilis eſt hæc definitio ſuperiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates ſuperficiei eſſe lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Ut ſuperficiei ABCD, extrema ſunt lineæ AB, BC, CD, DA.

TAB. I. fig. 2.

DEFINITIO. VII.

Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interjacet lineas.

HÆc quoque definitio, ſimilitudinem quandam deſcriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas ſuas interjacet, ita ut mediæ

Digitized by Google

mediæ partes ab extremis ſurſum, deorſumve ſubſultando, non recedant, appellabitur plana: qualis eſt ſuperficies perpoliti alicujus marmoris, in qua partes omnes in rectum ſunt collocatæ, ita ut nihil habeat inciſum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ ſunt ſitum, nec ulla eſt alia ſublimior, humiliorve, ſed omnes æquabiliter protenduntur.

Hæc autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari, & intelligere poſſumus deſcribi ex motu lineæ rectæ in tranſverſum, qui ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Ut ſi linea recta AB, per duas rectas AD, BC, feratur, efficietur ſuperficies perfecte plana. TAB. I. fig. 2.

Solent Mathematici ſuperficiem planam frequenter appellare planum, ita ut quando loquuntur de plano, intelligenda ſemper ſit ſuperficies plana.

DEFINITIO VIII.

Planus vero angulus, eſt duarum linearum in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Declarat, quidnam ſit angulus planus, dicens; quandocunque duæ lineæ in plana aliqua ſuperficie invicem concurrunt, & non in directum conſtituuntur, efficietur ex hujuſmodi concurſu, ſeu inclinatione unius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana conſtituatur ſuperficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ, AB, AC, concurrunt in A, & non jacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtentem ſuperficie, in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum jacere, quando altera eo- TAB. I. fig. 3.

Digitized by Google

rum verſus concurſum protenſa non coincidit cum altera, ſed vel eam ſecat, vel certe ſtatim poſt punctum concurſus ab ea recedit. Quod ſi duæ lineæ ſe mutuo tangant jacentes in directum, ita ut alterutra producta congruat toti alteri, non fiet ullus angulus ex illo concurſu, cum nulla ſit inclinatio, ſed ambæ unam integram lineam conſtituent. Ut quia recta

TAB. I. fig. 4. *AB, producta convenit cum recta BC, non efficietur angulus in B. Quare in directum dicentur jacere. Itaque ut lineæ rectæ efficiant angulum, neceſſe eſt, ut poſt concurſum productæ ſe mutuo ſecent.*

Conſiſtit autem anguli cujuſvis quantitas in ſola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent ſuam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem.

DEFINITIO. IX.

Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANgulus omnis planus qui conficitur ex lineis duabus rectis, rectilineus dicitur.

DEFINITIO. X.

Cum vero recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui ſunt deinceps, angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum. Et quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur ejus, cui inſiſtit.

DOcet hoc loco Euclides, quiſnam angulus rectilineus apud Geometras appellatur rectus, & quænam linea perpendicularis: ſi recta linea AB,

TAB. I. fig. 5. *rectæ CD, inſiſtens efficiat duos angulos prope punctum B,*

B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis eſſe deinceps, quod eos eadem linea CD, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter ſe æquales, quod tum demum fiet, quando recta AB, non magis in C, quam in D, inclinabit, ſed æquabiliter rectæ, CD, inſiſtet, vocabitur uterque angulus B, rectus, & recta AB, perpendicularis rectæ, CD, cui inſiſtit. Eadem ratione nominabitur recta CB, perpendicularis rectæ AB: quamvis enim CB, tantum faciat cum AB, unum angulum, tamen ſi AB, extenderetur in rectum & continuum verſus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori.

Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem eſſe rectum, aut lineam, quæ ipſum efficit, ad aliam eſſe perpendicularem, requiritur, & ſufficit, ut probemus angulum, qui eſt ei deinceps, æqualem illi eſſe. Pari ratione, ſi dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipſum conſtituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque eſſe.

DEFINITIO. XI.

Obtuſus angulus eſt, qui recto major eſt.

QUando recta AB, rectæ CD, inſiſtens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam cauſam neutrum rectum, ſed unum quidem recto majorem, alterum vero minorem, dicitur major angulus obtuſus, qualis eſt angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis, AB, BC. TAB. I. fig. 6.

Digitized by Google

DEFINITIO. XII.

Acutus vero, qui minor eſt recto.

TAB. I. fig. 6. *MInor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus.*

Quoniam vero ad quemvis angulum planum conſtituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures exiſtunt anguli, ſolent Mathematici, ut tollatur confuſio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media oſtendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero ſignificant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, angulum obtuſum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD, quod diligenter eſt notandum, ut facile dignoſcamus angulos, quorum mentio fit in demonſtrationibus.

DEFINITIO. XIII.

Terminus eſt, quod alicujus extremum eſt.

TRes ſunt termini juxta hanc definitionem. Punctum enim terminus eſt, ſeu extremum lineæ: Linea ſuperficiei: & ſuperficies corporis. Omne ſiquidem terminatum ſuperat terminum ſuum una dimenſione, ut perſpicuum eſt ex adductis exemplis.

DEFINITIO. XIV.

Figura eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NOn omnis quantitas terminos poſſidens Figura dici poteſt, ne lineam finitam figuram appellare

Digitized by Google

lare cogamur: Sed eæ ſolum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe ſuperficies terminatæ, & quæ profunditatem adeptæ quoque ſunt, ut ſolida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, ſed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare.

DEFINITIO. XV.

Circulus, eſt figura plana ſub una linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur; ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

DEfinit hic circulum, figuram inter planas perfectiſſimam, docens figuram illam planam, quæ unica linea circumſcribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab uno puncto, quod intra figuram exiſtit, ſint æquales, vocari circulum. Ut ſi ſuperficies, ſeu ſpatium concludatur unica linea ABC, habueritque hanc conditionem, ut ab aliquo puncto intus ſuſcepto, utpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum ABC, quales ſunt DA, DB, DC, inter ſe ſint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. TAB. I. fig. 7.

Adjungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis eſt ABC, appellari Peripheriam, ſeu, ut Latini exponunt, circumferentiam.

Poteſt circulus etiam hac ratione deſcribi. Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur à linea recta

Digitized by Google

finita circa alterum punctum extremum quieſcens circumducta, cum in eundem rurſus locum reſtituta fuerit, unde moveri cœperat. Ut ſi intelligatur recta
TAB. I. fig. 7. *AD, circa punctum D, quieſcens moveri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoveri cœpit, deſcribet ipſa recta totum ſpatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam ABC: Erit quoque punctum quieſcens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam ſunt inter ſe æquales, propterea quod recta AD, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, poſſunt educi ad peripheriam, æque metiatur.*

DEFINITIO. XVI.

Hoc vero punctum, centrum circuli appellatur.

D*Ocet, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ*
TAB. I. fig. 7. *ſunt æquales, appellari centrum circuli; quale eſt punctum D.*

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat.

TAB. I. fig. 8. S*I in circulo ducatur recta linea AB, per centrum C, ita ut extrema ejus A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, ſed ea ſolummodo, quæ per centrum uſque ad peripheriam utrinque extenditur.* Unde

Digitized by Google

Unde plures aſſignari poterunt in circulo diametri, unum vero centrum duntaxat.

Quod autem Euclides addit, circulum biſariam ſecari à diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diameter per medium circulum, utpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, ut propter directum diametri per centrum tranſitum, utrinque æquales circumferentiæ abſcindantur.

DEFINITIO. XVIII.

Semicirculus vero eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXempli gratia, in circulo figura ADB, contenta ſub diametro AB, & peripheria ADB, dicitur ſemicirculus; eadem ratione erit figura AEB, ſemicirculus. TAB. II fig. 8.

DEFINITIO. XIX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

OMnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur.

DEFINITIO. XX.

Trilateræ quidem, quæ ſub tribus,

AFfirmans Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumſcribuntur.

D E-

DEFINITIO. XXI.

Quadrilateræ quidem, quæ ſub quatuor.

DEFINITIO. XXII.

Multilateræ autem, quæ ſub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QUoniam ſpecies rectilinearum figurarum ſunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progreſſum. Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur perſequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumſcribuntur, generali vocabulo Multilateras.

DEFINITIO. XXIII.

Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum eſt Triangulum, quod tria latera habet æqualia.

TAB. I. fig. 9. *QUando omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, ut AB, BC, CA, dicitur triangulum Æquilaterum.*

DEFINITIO. XXIV.

Iſoſceles autem eſt, quod duo tantum æqualia habet latera.

TAB. I. fig. 10. fig. 11. *UTi, ſi duo latera AB & AC. tantum inter ſe ſint æqualia, vel DE & DF, dicetur utrumque triangulum Iſoſceles.*

D E-

DEFINITIO. XXV.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

QUando omnia tria latera inter ſe ſunt inæqualia, uti AB, BC, & CA, dicitur triangulum ſcalenum. *TAB. I, fig. 12.*

DEFINITIO. XXVI.

Ad hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

QUando triangulum aliquod habet angulum unum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Ut, ſi triangulum ABC, unum angulum habeat ad B rectum, dicetur illud triangulum rectangulum. *TAB. I. fig. 13.*

DEFINITIO. XXVII.

Amblygonium autem, quod obtuſum angulum habet.

TRiangulum Amblygonium, ſive obtuſangulum eſt, quod unum habet angulum recto majorem. Ut ſi in triangulo ABC, angulus ad B recto major exiſtat, vocetur triangulum amblygonium. *TAB. I. fig. 14.*

Digitized by Google

DEFINITIO. XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet acutos angulos.

IN omni porro triangulo, cujus duo quæcunque latera expreſſe nominantur, ſolet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Baſis, ſive illud in ſitu infimum occupet locum, ſive ſupremum.

DEFINITIO. XXIX.

Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt.

FIgura quadrilatera dicitur Quadratum, cujus quidem omnia quatuor latera inter ſe æqualia exiſtunt, omneſque anguli recti. Uti ſi in figura TAB. II. fig. 1. *quadrilatera ABCD, omnia, quatuor latera, AB, BC, CD, & DA, ſint inter ſe æqualia, & omnes anguli recti; erit illa Quadratum.*

DEFINITIO. XXX.

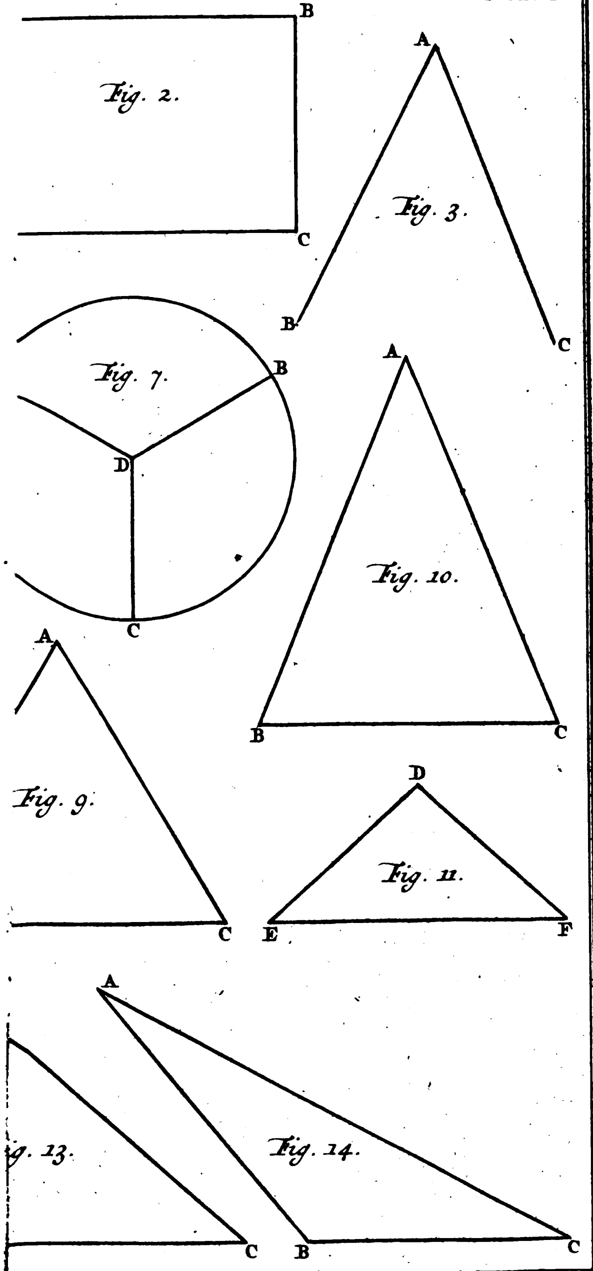
Altera vero parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.

FIgura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli ſunt recti, at latera non ſunt inter ſe æqualia, quamvis bina oppoſita inter ſe æqualia exiſtant. Ut, ſi in figura TAB. II. fig. 2. *ABCD, latera AB, DC, inter ſe, & AD, BC, inter ſe quoque æqualia ſint.*

DE-

Digitized by Google

TAB. I.


B
Fig. 2.
C
A
Fig. 3.
B
C
Fig. 7.
B
D
C
A
Fig. 10.
B
C
A
Fig. 9.
C
D
Fig. 11.
E
F
A
ig. 13.
C
Fig. 14.
B
C

Digitized by Google

DEFINITIO. XXXI.

Rhombus autem, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.

Figura inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppoſitas prorſus habet conditiones, & diverſas à conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera AB, BC, CD, & DA, æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamvis bini oppoſiti A & C, B & D inter ſe æquales exiſtant. TAB. II. fig. 3.

DEFINITIO. XXXII.

Rhomboides vero, quæ adverſa & latera, & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neque rectangula.

Est hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte oppoſita. Nam neque ejus latera omnia æqualia ſunt, neque ullus angulus rectus, ſed tamen latera bina oppoſita, qualia ſunt AB, DC, & AD, BC, in Rhomboide ABCD, æqualia inter ſe, item anguli bini oppoſiti, quales ſunt A, C, & B, D, inter ſe exiſtunt æquales. TAB. II. fig. 4.

DEFINITIO. XXXIII.

Præter has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, Trapezia appellentur.

Reliquas omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita ut neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales, ſeu

ſeu rectos, neque latera bina oppoſita; neque angulos binos oppoſitos habeant inter ſeſe æquales, qualis eſt TAB. II. Fig. 5. *figura ABCD, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem infinitis modis variari queant.*

DEFINITIO. XXXIV.

Parallelæ rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.

Ut duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, ſive æquidiſtantes, non ſatis eſt, ut in quamcunque partem, etiam ſpatio infinito, productæ nunquam ad unum punctum coeant; ſed neceſſe quoque eſt, ut in una plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem lineæ rectæ non exiſtentes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatium infinitum, nunquam in unum conveniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in tranſverſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; hæ etenim nunquam coire poſſunt.

Dicuntur autem duæ lineæ in eadem exiſtere plana ſuperficie, quando ſuperficies aliqua plana uni earum accommodata, ita ut omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumvoluta, alteri quoque accommodari poteſt ſecundum omnia ejus puncta, quamvis re ipſa in duabus ſuperficiebus diverſis reperiantur; TAB. II. Fig. 6. *Ut propoſitis duabus rectis lineis AB, CD, ſi ſuperficies aliqua plana rectæ AB, applicetur, omnia ejus tangens puncta, ita ut circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur hujuſmodi rectæ duæ lineæ in eadem ſuperficie plana exiſtere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant,*

Digitized by Google

coeant, etiamſi infinite producantur tam ad partes, A, C, quam ad, B, D, appellabuntur parallelæ, ſive æquidiſtantes.

Quod ſi duæ rectæ lineæ per immenſum aliquod ſpatium extenſæ non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandem ex una parte longius protractas in unum punctum conventuras, quamvis ex altera ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ac disjungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, neceſſarium eſſe duximus, duabus definitionibus adjunctis explicare, quid ſit Parallelogrammum, & quæ ſint parallelogrammi complementa, ut facilius demonſtrationes percipiantur.

DEFINITIO. XXXV.

[Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt parallela, ſeu æquidiſtantia.]

UT figura quadrilatera ABCD, ſiquidem latus AB, æquidiſtet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. TAB. II. fig. 4.

DEFINITIO. XXXVI.

[Cum vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ ſecantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; ap-

pellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.]

TAB. II. fig. 7. *Sit parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus AD, BC. Item linea HI, ſecans diametrum in eodem puncto G, paralleláque lateribus AB, DC, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diviſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non tranſit, vocantur à Geometris complementa, ſive ſupplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, ut videre eſt in præſenti figura.*

PETITIO VEL POSTULATUM. I.

Poſtuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

Primum hoc poſtulatum planum admodum eſt, ſi recte conſiderentur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit, ut ſi punctum quodpiam ad aliud directo moveri intellexerimus, ducta ſane ſit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione poſtulat Euclides, quemadmodum TAB. II. fig. 8. *hic vides à puncto A, ductam eſſe rectam lineam ad punctum B; ab eodemque aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & ſic innumeræ aliæ ab eodem puncto educi poſſunt ad alia atque alia puncta.*

PE-

PETITIO VEL POSTULATUM. II.

Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

Quod ſi punctum illud ferri adhuc cogitaverimus motu directo, & qui omnis inclinationis ſit expers, producta erit ipſa recta linea terminata, & nunquam erit finis hujus productionis, cum punctum illud intelligere poſſimus moveri ad infinitam diſtantiam. Sic linea recta AB, producta eſt primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c. TAB. II. fig. 9.

PETITIO VEL POSTULATUM. III.

Item quovis centro, & intervallo circulum deſcribere.

Jam vero, ſi terminatam rectam lineam cujuſcunque quantitatis, mente conceperimus applicatam eſſe ſecundum alterum extremum ad quodvis punctum, ipſamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum revertatur locum, à quo dimoveri coepit; deſcriptus erit circulus, effectumque, quod tertia petitio jubet. Exemplum habes in his quinque lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ ſingulæ circa centrum A, circumvolutæ, ſingulos circulos deſcripſerunt juxta quantitatem, ſeu intervallum ipſarum. TAB. II. fig. 10.

Præter hæc tria poſtulata, quibus Euclides contentus fuit, ſunt multa alia æque facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decrevi illud, quod frequentius repetendum erit in progreſſu totius Geometriæ.

Digitized by Google

PETITIO vel POSTULATUM. IV.

[Item quacunque magnitudine data, ſumi poſſe aliam magnitudinem vel majorem, vel minorem.]

OMnis enim quantitas continua per additionem augeri, per diviſionem vero diminui poteſt infinite: Unde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea major dari poſſit: neque tam parva, quin minor ea poſſit exhiberi.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. I.

Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

[Et quod uno æqualium majus eſt, aut minus, majus quoque eſt, aut minus altero æqualium. Et ſi unum æqualium majus eſt, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus eſt, aut minus.]

FIeri nulla ratione poteſt, ut duæ quantitates inæquales, æquales ſint alteri quantitati. Si enim minor illarum propoſitæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem neceſſario major illarum. Et ſi major æqualis fuerit propoſitæ quantitati, ſuperabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter ſe æquales quoque eſſe.

Digitized by Google

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. II.

Et ſi æqualibus æqualia adjecta ſint, tota ſunt æqualia.

Si enim quantitates conflatæ, ſive compoſitæ, inæquales forent, proculdubio majori plus eſſet adjectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantites æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. III.

Et ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

Nam ſi reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuiſſet detractum, quam à majore.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adjecta ſint, tota ſunt inæqualia.

[Et, ſi inæqualibus inæqualia adjecta ſint, majori majus, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

Quin & , ſi æqualibus inæqualia adjecta ſint, tota erunt inæqualia: quoniam major quantitas addita uni æqualium, majorem conſtituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adjecta: quemadmodum & ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, compoſita quantitas ex majore, major eſt, quam compoſita ex minore.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia.

[Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint, à majori minus, & à minori majus, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

Sic etiam, ſi ab æqualibus inæqualia ablata ſint, reliqua erunt inæqualia: quia major quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum reſiduum majoris majus eſt reſiduo minoris, ſi æqualia auferantur ab inæqualibus.

In his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda eſt etiam una & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adjiciatur, tota fient æqualia: Et ſi ab æqualibus idem commune detrahatur, reſidua æqualia erunt: Et ſi inæqualibus idem commune adjiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & ſi ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, reſidua exiſtent inæqualia.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. VI.

Et 'quæ ejuſdem duplicia' ſunt, inter ſe ſunt æqualia.

[Et quod unius æqualium duplum eſt, duplum eſt & alterius æqualium.]

Similiter, quæ ejuſdem ſunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter ſe ſunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & majus eorum eſſet

eſſet duplex, vel triplex, &c. alicujus quantitatis, deficeret utique minus à duplici, vel triplici. &c. Quod ſi contra, minus eſſet duplex, vel triplex, &c. quantitatis cujuſpiam, excederet ſane majus duplex ipſum; vel triplex, &c.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VII.

Et quæ ejuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt.

[Et contra, Quæ æqualia ſunt, ejuſdem ſunt dimidia.]

Pari ratione, quæ ejuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

In his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VIII.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

Hoc eſt, duæ quantitates, quarum una ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Ut duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando una alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita ut eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando uno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit,

nec ab eo exceditur, ſed lineæ illius cum lineis hujus prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamvis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. IX.

Et totum ſua parte majus eſt.

Cum pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferatur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte majus.

In ſequentibus porro pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis. In margine tamen numeros appoſuimus ordini Euclidis reſpondentes.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. X.

[Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem ſegmentum commune.]

Non eſt difficile iſtud Axioma, ſi perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo ſemper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione poteſt, ut duæ lineæ rectæ habeant unam partem, quamvis minimam, communem, præter unicum punctum, in quo ſe mutuo interſecant.

Poſſunt tamen duæ lineæ rectæ commune habere ſegmentum, quando unam & eandem rectam lineam TAB. II. fig. 9. *conſtituunt. Ut in hac figura, rectæ AC, BD, commune habent ſegmentum BC, quia ambæ unam rectam conſtituunt lineam AD. At vero quando* TAB. II. fig. 11. *duæ rectæ ſunt diverſæ, quales ſunt AB, CD, non poſſunt poſſidere ſegmentum aliquod commune.*

DE-

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. XI.

[Duæ rectæ in uno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſario ſe mutuo in eo puncto interſecabunt.]

Hoc etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. XII. XI.

Item, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

Hoc axioma apertiſſimum eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuive nequit, ſed prorſus eſt immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, ut faciat utrobique angulos æquales, neque magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cum ſemper ſit eadem inclinatio, quamvis lineæ ſint inæquales interdum.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. XIII. XII.

Et ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores.

Ut ſi in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex TAB. II. fig. 12.

ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conventuras eſſe ad aliquod punctum unum, verſus eam partem, in qua duo anguli minores exiſtunt duobus rectis, ut appoſitum exemplum commonſtrat. Ratio hujus perſpicua eſt, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales ſunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire poſſunt, ſed æquali ſemper ſpatio protenduntur, ut in propoſ. 28. hujus lib. demonſtrabitur. Quare ſi duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, neceſſe eſt ex ea parte dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoque eas conventuras tandem eſſe aliquando in unum punctum.

XII. AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIV.

Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

NUllam prorſus habet difficultatem hoc principium.
TAB. II. fig. 13. *Si enim duæ rectæ lineæ AB, & CB, ex una parte B, coeant ad efficiendum angulum, neceſſario ex altera parte A, & C, ſemper magis ac magis disjungentur, ſi producantur, ut in exemplo propoſito perſpicuum eſt. Quare ut ſuperficies, ſpatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adjungenda eſt.*

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XV.

[Si æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum exceſſus, adjunctorum exceſſui æqualis.]

HOc, & ſequens pronunciatum deſumpſit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaque quantitatibus,

AB,

AB, CD, addantur inæquales BE, DF, ſitque BE, major quam DF. Et ex BE, auferatur BG, æqualis ipſi DF, ut ſit GE, exceſſus, quo quantitas addita BE, ſuperat quantitatem additam DF. Quoniam igitur æqualibus AB, CD, addita ſunt æqualia BG, DF, a erunt tota AG, CF, æqualia. Quare conſtat, totam quantitatem AE, ſuperare totam CF, eodem exceſſu GE, quo magnitudo DF, adjuncta, à magnitudine adjuncta BE, ſuperatur. Quod eſt propoſitum. TAB. II. fig. 14. a 2. pron.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVI.

[Si inæqualibus æqualia adjungantur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis.]

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, DF, addantur æquales AB, CD. Et ex majore BE, auferatur BG, aequalis ipſi DF, ut GE, ſit exceſſus; quo quantitas BE, quantitatem DF, ſuperat. Quoniam igitur aequalibus BG, DF, addita ſunt aequalia AB, CD, a erunt tota AG, CF, aequalia. Quamobrem tota quantitas AE, ſuperabit totam CF; eodem exceſſu GE, quo major quantitas propoſita BE, minorem DF, ſuperat. Quod eſt propoſitum. TAB. II. fig. 14. a 2. pron.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVII.

[Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.]

AB aequalibus AB, CD, auferantur inaequalia BE, DF. Sitque EG, exceſſus, quo quantitas BE, ſuperat quantitatem DF; ita ut BG, aequalis ſit ipſi DF. Quia igitur ab aequalibus AB, CD, ablata ſunt aequalia BG, DF, b remanebunt TAB. II. fig. 15. b 3. pron.

AG,

AG, CF, aequalia. Perſpicuum ergo eſt, reſiduum AE, ſuperari à reſiduo CF, eodem exceſſu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, ſuperat. Quod eſt propoſitum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVIII.

[Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.]

TAB. II. fig. 16. *AB inaequalibus AB, CD, auferantur aequalia AE, CF. Sitque BG, exceſſus, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD, ita ut AG, aequalis ſit ipſi CD. Quoniam igitur ab aequalibus AG, CD, ablata ſunt aequalia AE,* c 3. pron. *CF,* c *remanebunt EG, FD, aequalia. Quare reſiduum EB, ſuperabit reſiduum FD, eodem exceſſu BG, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD. Quod eſt propoſitum.*

In his quoque quatuor proxime poſitis pronunciatis, nomine quantitatum aequalium intelligenda eſt una etiam ſola quantitas multis communis.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIX.

[Omne totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.]

QUoniam omnes partes ſimul ſumptae conſtituunt totum, cujus ſunt partes, manifeſta eſt veritas hujus axiomatis.

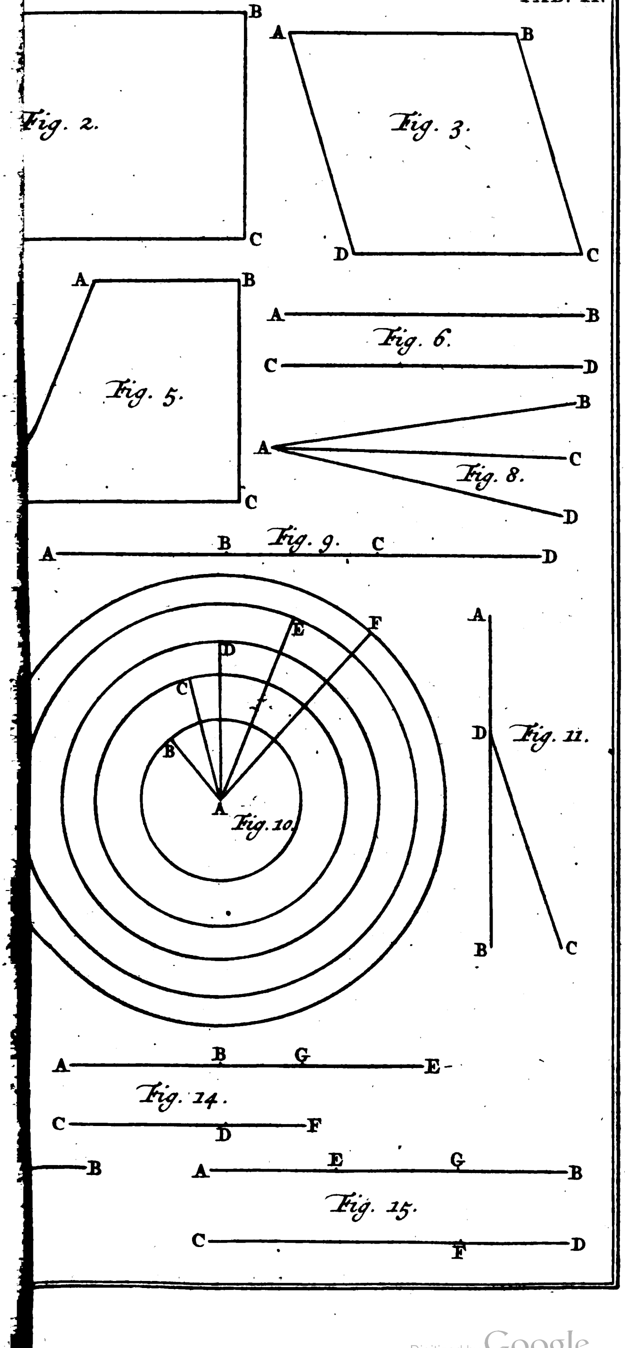
AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XX.

[Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.]

UT quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus eſt etiam reliqui hujus 7.

PRO-

TAB. II.


Fig. 2.
B
C
A
B
Fig. 3.
D
C
A
B
Fig. 5.
C
A
B
Fig. 6.
C
D
B
A
C
Fig. 8.
D
A
B
Fig. 9.
C
D
F
E
D
C
B
A
Fig. 10.
A
D
Fig. 11.
B
C
A
B
G
E
Fig. 14.
C
D
F
B
A
E
G
B
Fig. 15.
C
F
D

Digitized by Google

PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere.

SIt igitur propoſita recta linea terminata AB, ſuper quam conſtituere jubemur triangulum aequilaterum. Centro A, & intervallo rectae AB, *a* deſcribatur circulus CBD: Item centro B, & intervallo ejuſdem rectae BA, alius circulus deſcribatur CAD, ſecans priorem in punctis C, & D. Ex quorum utrovis, nempe ex C, *a* ducantur duae rectae lineae CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque ſuper rectam AB, conſtitutum triangulum ABC, hoc eſt, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita conſtructum neceſſario eſſe aequilaterum. Quoniam rectae AB, AC, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli CBD, *b* erit recta AC, rectae AB, aequalis: Rurſus, quia rectae BC, BA, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli CAD, erit recta BC, rectae BA, aequalis. Tam igitur AC, quam BC, aequalis eſt rectae AB, *c* Quare & AC, BC, inter ſe aequales erunt, atque idcirco triangulum ABC, erit aequilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

TAB. III. fig. 1.
a 3. *pet.*
a 1. *pet.*
b 15. *def.*
c 1.

PRO-

PROBLEMA 2. PROPOSITIO. 2.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

TAB. III. fig. 2. 3. Sit punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC, nempe C, centro, *a* deſcribatur circulus BE, intervallo rectæ BC. Et ex A, ad centrum C, *b* recta ducatur AC; (niſi punctum A, intra rectam BC, fuerit: ut in figura 3. Tunc enim pro linea ducta ſumetur AC,) Super recta vero AC, *c* conſtruatur triangulum æquilaterum ACD, ſurſum, aut deorſum verſus, ut libuerit; cujus duo latera modo conſtituta DA, DC, verſus rectam AC, *d* extendantur; DC, quidem oppoſitum puncto dato A, uſque ad circumferentiam in E; DA, vero oppoſitum centro C, quantum libet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ DE, per C, centrum tranſeuntis, *e* alter circulus deſcribatur EG, ſecans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ poſita eſt ad punctum datum A, æqualem eſſe datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ ſunt ex centro D, ad circumferentiam EG, *f* ipſæ inter ſe æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC, æqualibus lateribus trianguli æquilateri ACD, *g* remanebit AG, æqualis rectæ CE. Sed eidem CE, *a* æqualis eſt recta BC. (cum ambæ rectæ CB, CE, cadent ex centro C, ad circumferentiam BE.) Igitur rectæ AG, BC, quandoquidem utraque æqualis eſt oſtenſa rectæ CE, inter ſe *b* æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

a 3. *pet.* — *b* 1. *pet.* — *c* 1. *primi.* — *d* 2. *pet.* — *e* 3. *pet.* — *f* 15. *def.* — *g* 3. *pron.* — *a* 15. *def.* — *b* 1. *pron.*

Quod ſi punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale eſt C, facile abſolvetur problema. Si enim centro C, & interuallo CB, *c* deſcribatur circulus, ad cujus circumferentiam recta *d* ducatur utcunque; CE, erit hæc poſita ad punctum datum C, *e* æqualis datæ rectæ BC, cum utraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam BE.

c 3. *petit.* — *d* 1. *petit.* — *e* 15. *def.*

PRO-

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrahere.

Sint duæ rectæ inæquales A, minor, & BC, major, oporteatque ex majore BC, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ majoris BC, nempe ad punctum B, *a* ponatur aliqua linea, quæ ſit BD, æqualis minori A. Deinde centro B, intervallo autem BD, circulus *b* deſcribatur ſecans BC, in E. Dico BE, detractam eſſe æqualem ipſi A. Quoniam BE, *c* æqualis eſt rectæ BD, & eidem, BD, æqualis eſt recta A, per conſtructionem; *d* erunt A, & BE, inter ſe æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum. TAB. III. fig. 4. a 2. primi. b 3. pet. c 15. def. d 1. pron.

Quod ſi duæ rectæ datæ conjungantur in uno extremo, quales ſunt BD, & BC, conjunctæ in extremo utriuſque B; deſcribendus erit circulus ex B, ad intervallum minoris BD. Hic enim auferet BE, æqualem ipſi BD, ut conſtat ex definitione circuli.

THEOREMA 1. PROPOS. 4. iiij.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique; habeant vero & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſim baſi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, & unius utrumque latus AB, AC, æquale ſit alterius utrique TAB. III. fig. 5.

lateri

Digitized by Google

lateri DE, DF, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico baſim BC, æqualem quoque eſſe baſi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & utrumque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id eſt, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter ſe; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter ſe quoque eſſe æquales. Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, ut ſi altera alteri ſuperponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, *a* ipſæ ſibi mutuo congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem ſegmentum commune, *b* quod eſt impoſſibile. Quod ſi quis dicat, poſito puncto, A, in D, cadere quidem punctum B, in E, ſed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad ſiniſtram DE, claudent duæ rectæ lineæ ſuperficiem. *c* quod fieri non poteſt. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, ut dictum eſt. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alter alteri, hoc eſt, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Baſis igitur BC, baſi EF, congruet quoque: alias ſi ſupra caderet, aut infra, ut efficeretur recta EGF, EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, ſuperficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quam EHF, rectam eſſe, cum utraque ponatur eſſe eadem, quæ recta BC.) quod eſt abſurdum. Duæ enim rectæ ſuperficiem *e* claudere non poſſunt. Quocirca *f* baſis BC, baſi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, aequalis ob eandem cauſam, exiſtet. Quare ſi duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 8. pron.
b 10. pron.
c 14. pron.
d 8. pron.
e 14. pron.
f 8. pron.

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 2. PROPOS. 5.

Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.

Sit triangulum Iſoſceles ABC, in quo latera, AB, AC, inter ſe ſint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales inter ſe eſſe: Item ſi latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit, uſque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra baſim eandem BC, eſſe æquales. Ex linea enim AE, producta infinite *a* abſcindatur AF, æqualis ipſi AD, *b* & ducantur rectæ BF, CD. Conſiderentur deinde duo triangula ABF, ACD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, æqualia ſunt duobus lateribus AC, AD, trianguli ACD, utrumque utrique, nempe AB, ipſi AC, ex hypotheſi, & AF, ipſi AD, ex conſtructione; anguluſque A, contentus lateribus AB, AF, æqualis eſt angulo A, contento lateribus AC, AD, immo angulus A, communis eſt utrique triangulo: *c* Erit baſis BF, æqualis baſi CD, & angulus F, angulo D, & angulus ABF, angulo, ACD; cum & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, ut patet: Rurſus conſiderentur duo triangula BDC, CFB. Quoniam vero rectæ AD, AF, æquales ſunt, per conſtructionem, fit ut, ſi auferantur ex ipſis æquales AB, AC, *d* & reliquæ BD, & CF, ſint æquales. Quare duo latera BD, DC, trianguli BDC, æqualia ſunt duobus lateribus CF, FB, trianguli CFB, utrumque utrique, videlicet BD, ipſi CF, & DC, ipſi FB, ut probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut oſtenſum etiam fuit. Igitur *e* erit angulus

TAB. III. fig. 6.

a 3. *primi.*
b 1. *peti.*
c 4. *primi.*
d 3. *primi.*

Digitized by Google

e 4. primi. e DBC, angulo FCB, æqualis; & angulus BCD, angulo CBF. Tam enim priores duo, quam poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntque ſupra communem baſim BC, utriuſque trianguli BDC, CFB. Quod ſi ex totis angulis æqualibus ABF, ACD, (quos æquales eſſe jam demonſtravimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF, BCD, (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probavimus eſſe
f 3. pron. æquales) f remanebunt anguli ABC, ACB, ſupra baſim BC, æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos DBC, FCB, qui quidem ſunt infra eandem baſim BC, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales; ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex hac propoſitione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum eſſe æquiangulum quoque. Hoc eſt, tres
TAB. III. fig. 7. angulos cujuslibet trianguli æquilateri eſſe inter ſe æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC. Quoniam
a 5. primi. igitur duo latera AB, AC, ſunt æqualia, a erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, ſunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod oſtendendum erat.

vi. THEOR. 3. PROPOS. 6.

Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

TAB. III. fig. 8. In triangulo ABC, ſint duo anguli ABC, ACB, ſuper latus BC, æquales. Dico duo latera illis oppoſita AB, AC, eſſe quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, exiſtentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum majus

jus altero; ſit igitur AB, majus quam AC, ſi, fieri poteſt: Et ex AB, *b* abſcindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur eſſe quam AB,) ducaturque recta CD. Conſiderentur jam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia ſint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, utrumque utrique, nempe AC, ipſi DB, (abſcidimus enim ex AB, ipſi AC, conceſſu adverſarij, æqualem DB,) & CB, ipſi BC, cum ſit unum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: *c* Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum & pars, quod fieri non poteſt *d*. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli, duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 3. *primi*

c 4. *primi.*

d 9. *pron.*

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cujus omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem converſum eſt corollarii quintæ propoſitionis, ut liquet. Sint enim trianguli ABC, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, ſint æquales, *a* erunt latera AB, AC, æqualia. Rurſus cum duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqualia, & idcirco omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia. Quod oſtendendum erat.

TAB. III. fig. 7.

a 6. *primi.*

THEOR. 4. PROPOS. 7. vii.

Super eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum: ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SUper recta AB, conſtituantur ad punctum quodvis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico ſuper

TAB. III. fig. 9, 10, 11, 12, 13.

ſuper eandem rectam AB, verſus partem eandem C, non poſſe ad aliud punctum, ut ad D, conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis AC, BC, utraque utrique, nempe AC, ipſi AD, quæ eundem habent terminem A; & BC, ipſi BD, quæ eundem etiam terminum poſſident B. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ AC, AD, inter ſe, & rectæ BC, BD, inter ſe etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita ut recta AD, in ipſam rectam AC, vel, BD, in ipſam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, ut AD, ſit

TAB. III. fig. 9.

pars ipſius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. *f* Quod fieri non poteſt. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC; & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, uſque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia, *a* erunt anguli ACD, ADC, ſuper baſim CD, æquales; *b* Eſt autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipſius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rurſus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, *c* erunt anguli CDF, DCE, ſub baſi CD, æquales. Oſtenſum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo ſit minor angulo DCE. Idem ergo Angulus CDF, & minor eſt angulo DCE, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Sit poſtremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea ſuper alteram cadat, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipſum D; ex quo rurſus colligetur pars æqualis toti, quod eſt abſurdum. Aut in tali erit loco, ut poſteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ſi modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo poſito, in idem abſurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem

f 9. pron.
TAB. III. fig. 10.
a 5. primi.
b 9. pron.
c 5. primi.
TAB. III. fig. 11.
TAB. III. fig. 12.

rem eſſe angulo CDE, & eidem æqualem, ut perſpicuum eſt. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum ABC, ut altera linearum poſteriorum, nempe AD, ſecet alteram priorum, ut ipſam BC. Ducta igitur recta CD, cum in triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æqualia, *d* erunt anguli ACD, ADC, ſupra baſim CD, æquales: Ac proinde *e* cum angulus ADC, minor ſit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rurſus cum in triangulo BCD, latera BC, BD, ponantur æqualia, *a* erunt anguli BCD, BDC, ſuper baſim CD, æquales: Eſt autem jam oſtenſum, angulum BCD, multo eſſe minorem angulo BDC. Idem igitur angulus BCD, & minor eſt angulo BDC, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe AC, AD, nec inter ſe quoque BC, BD. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis. &c. Quod erat demonſtrandum.

TAB. III. fig. 13.
d 5. primi.
e 9. proni.
a 5. primi.

THEOR. 5. PROPOS. 8. viij.

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrumque utrique, æqualia, habuerint vero & baſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SInt duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, utrumque utrique, nempe AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; ſit autem & baſis BC, baſi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum videlicet uterque dictis lateribus continetur. Nam ſi mente intelligatur baſis BC, ſuperponi baſi EF, *a* neutra excedet alteram, ſed punctum B, congruet puncto E, & punctum C,

TAB. III. fig. 14.
a 8. pron.

punćto F, cum hæ baſes ponantur æquales inter ſe. Deinde ſi triangulum ABC, cogitetur cadere ſuper triangulum DEF, cadet punctum A, aut in ipſum punctum D, aut alio. Si punctum A, in ipſum punctum D, cadet, congruent ſibi mutuo triangulo-
a 8. pron. rum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea *a* angulus A, æqualis erit Angulo D, cum neuter alterum
fig. 14. 15. 16. excedat. Quod ſi punctum A, aliò dicatur cadere, ut ad G, quomodocumque id contingat, hoc eſt, ſive in latus ED, ſive intra triangulum EDF, ſive extra, ut in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem eſt, que BA,) æqualis ipſi ED; & FG, (quæ eadem eſt, quæ CA,) æqualis ipſi FD, propterea quod latera unius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc
b 7. primi. autem fieri non poſſe, jam dudum *b* demonſtratum eſt, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, poſſideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare ſi duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Si duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, utrumque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumque utrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtenduntur, anguloſque reliquos hiſce lateribus incluſos æquales.

TAB. III. fig. 14. *Sit enim baſis BC, æqualis baſi EF, & angulus B, angulo E, anguluſque C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale eſſe, angulumque A, angulo D. Nam*
a 8. pron. *ſi baſis baſi ſuperponatur, a congruent ſibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium.*

Quare

Quare omnia ſibi congruent, propiereaque omnia inter ſeſe æqualia erunt.

COROLLARIUM.

Porro ex antecedente hujus octavæ propoſitionis non ſolum colligi poteſt, angulos lateribus æqualibus contentos æquales eſſe, verum etiam reliquos angulos, qui ad baſes conſtituuntur, utrumque utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F, immo totum triangulum toti triangulo, ut conſtat ex eadem ſuperpoſitione unius trianguli ſuper alterum. Nam ſibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perſpicuum eſt. *TAB. III. fig.* 14.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

ix.

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

SIt dividendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc eſt, in duos angulos æquales. In recta AB, ſumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, *a* ſecetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde ſuper DE, *b* conſtituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, dividens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia ſint lateribus EA, AF, trianguli EAF, utrumque utrique, quod DA, ipſi EA, per conſtructionem, ſit æquale, & AF, commune; Sit autem & baſis DF, baſi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, conſtructum eſt æquilaterum: *c* Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diviſus bifariam, quod erat faciendum.

TAB. III. fig. 17.
a 3. *primi.*
b 1. *primi.*
c 8. *primi.*

x. PROBL. 5. PROPOS. 10.

Datam rectam lineam finitam biſariam ſecare.

TAB. IV. fig. 1. SIt recta finita AB, dividenda biſariam, id eſt in duas partes æquales. *a* Deſcribatur ſuper
a 1. primi. AB, triangulum æquilaterum ABC, cujus angu-
b 9. primi. lus C, per rectam CD, *b* dividatur biſariam, rectaque CD, rectam AB, ſecet in D. Dico rectam AB, biſariam eſſe diviſam in D. Quoniam duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia ſunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD, utrumque utrique, nempe AC, ipſi BC, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & CD, eſt commune; Eſt autem & angulus ACD, angulo
c 4. primi. BCD, æqualis, per conſtructionem: *c* Erit baſis AD, baſi BD, æqualis. Datam ergo rectam AB, biſariam ſecuimus in D, quod facere oportebat.

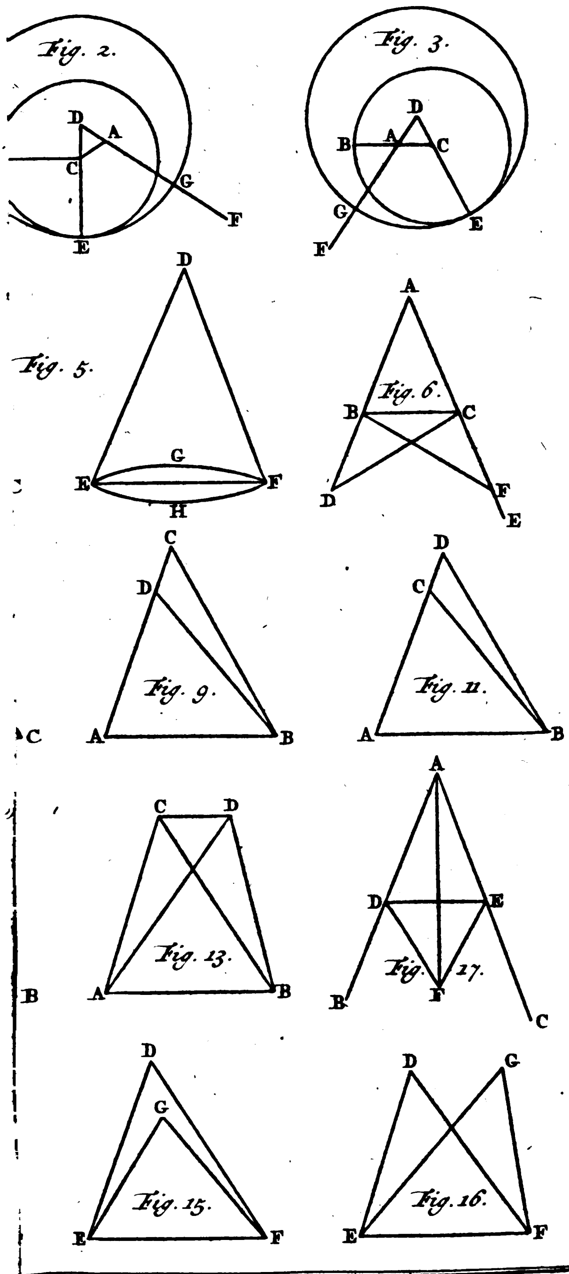
xj. PROBL. 6. PROPOS. 11.

Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

TAB. IV. fig. 2. REcta linea data ſit AB; & in ea punctum C, à quo jubemur erigere ſuper AB, lineam ad Angulos rectos, ſeu perpendicularem. A puncto
a 3. primi. C, ſumatur recta CD, *a* cui æqualis auferatur
b 1. primi. CE. Deinde ſuper DE, *b* conſtituatur triangulum æquilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico eſſe perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, æqualia ſunt lateribus EC, CF, trianguli ECF, utrumque utrique, nempe DC, ipſi EC, per conſtructionem, & CF, commune; Eſt vero & baſis DF, baſi EF, æqualis, ob triangulum æqui-
c 8. primi. laterum: *c* Erunt anguli ad C, contenti dictis
d 10. def. lateribus, æquales. *d* Quare dicetur uterque rectus,

Digitized by Google

TAB. III.



Digitized by Google

rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

SIt recta AB, interminatæ quantitatis, & extra ipſam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro C, intervallo vero quolibet circulus deſcribatur *e* ſecans AB, in D, & E, (quoniam intervallum aſſumptum tantum eſſe debet, ut tranſcendat rectam AB; alias eam non ſecaret.) *a* Diviſa autem recta DE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem eſſe ad AB. Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, utrumque utrique, per conſtructionem; eſt autem & baſis CD, baſi CE, æqualis, *d* cum hæ ſint ex centro C, ad circumferentiam. Quare *b* erit angulus DFC, angulo EFC, æqualis, & proptérea uterque rectus *c*: Ducta eſt igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.

TAB. IV. fig. 3. e 3. *petit.* a 10. *primi* d 15. *def.* b 8. *primi* c 10. *def.*

THEOR. 6. PROPOS. 13. xiij.

Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

REcta linea AB, conſiſtens ſuper rectam DC, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD; *c* erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet unum quidem angulum obtu-

TAB. IV. fig. 4. c 10. *def.*

 ſum,

ſum, alterum vero acutum. Dico igitur ipſos
d 11. primi duobus eſſe rectis æquales. *d* Educatur enim BE,
ex B, perpendicularis ad CD, ut ſint duo anguli
EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus
e 19. pron. EBD, *e* æqualis eſt duobus DBA, ABE; *f* erunt,
f 2. pron. appoſito communi angulo recto EBC, duo recti
EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC,
g 19. pron. æquales. Rurſus quia *g* angulus ABC, duobus
a 2. pron. angulis ABE, EBC, æqualis eſt; *a* erunt, appoſito communi angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eiſdem his tribus oſtendimus, æquales etiam eſſe duos rectos EBD, EBC; quæ autem
b 1. pron. eidem æqualia, *b* inter ſe ſunt æqualia. Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales ſunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea ſupra rectam conſiſtens lineam, &c. Quod oſtendere oportebat.

xiv. THEOR. 7. PROPOS. 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

TAB. IV. fig. 5. AD punctum C, lineæ rectæ AB, in diverſas partes eductæ ſint duæ rectæ CD, CE, facientes cum AB, duos angulos ACD, ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipſas CD, CE, inter ſe eſſe conſtitutas in directum, ita ut DCE, ſit una linea recta. Si enim non eſt recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum, cadet aut ſupra CE, ut ſit recta DCF, aut infra CE, ut ſit recta DCG. Si cadit ſupra, cum AC, conſiſtat ſuper
a 13. primi rectam DCF, *a* fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo
b 12. pron. anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; *b* & omnes

omnes recti ſunt inter ſe æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales, ablato igitur communi angulo ACD, *c* remanebunt anguli ACF, ACE, inter ſe æquales, pars & totum, *d* quod eſt abſurdum. Non igitur recta DC, producta cadet ſupra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea que, ſi ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, &c. Quod demonſtrandum erat. c 3. pron. d 9. pron.

THEOR. 8. PROPOS. 15. XV.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

SEcent ſe duæ rectæ AB, CD, in puncto E, utcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter ſe eſſe æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, conſiſtit ſuper rectam AB, *b* erunt duo anguli AED, DEB, æquales duobus rectis. Rurſus quia recta BE, ſuper rectam CD, conſiſtit, erunt eadem ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cum igitur *c* omnes recti anguli inter ſe ſint æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, *d* remanebit angulus AED, angulo BEC, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter ſe æquales eſſe. Nam duo anguli AEC, CEB, *e* qui duobus ſunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis DEB, BEC, qui duobus rectis ſunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, *f* remanebunt anguli AEC, BED, æquales inter ſe. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, &c. Quod oſtendere oportebat.

TAB. IV. fig. 6. b 13. primi c 12. pron. d 3. pron. e 13. primi f 3. pron.

COROLLARIUM. I.

Euclides colligit ex demonſtratione hujus theorematis, (ex ſententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas ſe mutuo ſecantes, efficere ad punctum ſectionis quatuor angulos, quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonſtratione oſtenſum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus eſſe rectis æquales, per 13. propoſ. Omnes igitur quatuor anguli ad E, conſtituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales exiſtunt.

COROLLARIUM. II.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa unum & idem punctum conſtitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales eſſe. Si enim ex, E, aliæ lineæ quotlibet educantur, dividentur ſolummodo illi quatuor anguli ad E, conſtituti, in plurimas partes,
a 19. prop. *a* quæ omnes ſimul ſumptæ totis ſuis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales ſint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alii ſimul ſumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perſpicuum eſt, omne ſpatium punctum aliquod in plano circumſtans, æquivalere quatuor rectis angulis, ut multi auctores aſſerunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum conſtitui poſſunt, quatuor ſunt rectis angulis æquales. Simili modo conſtat, quotlibet lineas rectas ſe invicem ſecantes, facere ad punctum ſectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX PROCLO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad ejuſque ſignum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt.

TAB. IV. fig. 6. *Ex puncto E, rectæ AB, in diverſas partes egrediantur duæ rectæ ED, EC, facientes angulos AED,*

AED, BEC, inter ſe æquales: Vel etiam duos AEC, BED. Dico duas EC, ED, efficere unam lineam rectam. Quoniam enim angulus AED, æqualis eſt angulo BEC; addito communi angulo BED, b erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis CEB, BED, æquales: Sed c anguli AED, DEB, ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo CEB, BED, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem EC, ED, a erunt linea una recta. Hoc autem, ut vides, converſum eſt propoſitionis decimaquintæ.

b 2. pron. c 13. primi a 14. primi

THEOR. 9. PROPOS. 16. xvj.

Cujuſcunque trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno, & oppoſito, major eſt.

TRianguli ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, majorem eſſe interno, & oppoſito ACB, itemque majorem interno, & oppoſito ABC. Dividatur *a* enim AC, biſariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BEF, ita ut EF, *b* abſciſſa ſit æqualis rectæ EB; ducaturque recta FA. Quoniam igitur latera CE, EB, trianguli CEB, æqualia ſunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, utrumque utrique, per conſtructionem; Sunt autem & Anguli ad E, dictis lateribus comprehenſi, *c* inter ſe æquales, cum ſint circa verticem E, & oppoſiti: Erit *d* baſis CB, æqualis baſi AF, & angulus ECB, angulo EAF; Eſt autem angulus DAC, externus major angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, major erit interno, & oppoſito angulo ACB. Quod ſi latus CA, producatur ad G; & AB, dividatur biſariam in H; extendaturque recta CHI, ut HI, æqualis ſit rectæ HC, & ducatur recta IA: demonſtrabitur eadem prorſus ratione, angulum externum GAB, majorem eſſe interno angulo, & oppoſito ABC; Eſt autem *e* angulus DAC,

TAB. IV. fig. 7. a 10. primi b 3. primi c 15. primi d 4. primi e 15. primi

angulo

angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, ſe mutuo ſecent in A. Igitur & angulus DAC, major erit interno & oppoſito angulo ABC. Eſt autem idem angulus DAC, major quoque oſtenſus angulo interno & oppoſito ACB. Cujuſcunque ergo trianguli uno latere producto, &c. Quod demonſtrandum erat.

xvij. THEOR. 10. PROPOS. 17.

Cujuſcunque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

TAB. IV. fig. 8. SIt triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores eſſe duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quævis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur *d* angulus ABD, externus major eſt interno & oppoſito angulo ACB; ſi addatur communis angulus ABC, *e* erunt duo anguli ABD, ABC, majores duobus angulis ABC, ACB: *f* Sed ABD, ABC, æquales ſunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores ſunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, *g* major ſit angulo CAB, interno, & oppoſito; *h* erunt, appoſito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, majores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo *i* duo illi duobus rectis ſint æquales, erunt hi alii duo duobus rectis minores. Non ſecus oſtendemus, duos BAC, BCA, duobus eſſe rectis minores. Cum enim angulus externus BAE, *m* major ſit interno & oppoſito angulo BCA; ſi apponatur communis angulus BAC, *n* erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, majores: ac proinde cum illi duo *o* ſint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cujuſque igitur trianguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

d 16. primi *e 4. pron.* *f 13. primi* *g 16. primi* *h 4. pron.* *i 13. primi* *m 16 primi* *n 4. pron.* *o 13. primi*

EX

EX PROCLO.

Hinc perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quam unam. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum ſint duo recti, quod eſt abſurdum. a *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam una, ex A, ad BC, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.*

TAB. IV. fig. 11.

a 17. primi

COROLLARIUM. I.

Conſtat etiam ex his, in omni triangulo, cujus unus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos. Cum enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi unus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunque reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis majores eſſe fateamur.

COROLLARIUM. II.

Sequitur etiam ex hac propoſ. ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, unum acutum, & obtuſum alterum, lineam perpendicularem ex quovis ejus puncto ad aliam illam rectam demiſſam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtuſum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam ſi non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat ſi fiere poteſt, ad partes anguli obtuſi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtuſus & rectus, in triangulo ABC, majores ſunt duobus rectis; b ſed & duobus rectis ſunt minores, quod eſt abſurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtuſi. Quare ad partes acuti anguli cadit.

TAB. IV. fig. 9.

b 17. primi

CO-

COROLLARIUM. III.

Pari ratione ſit ex hac propoſ. manifeſtum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli
e 5. primi Iſcoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos. Nam *c* cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Iſcoſcele
d 17. primi ſupra baſin ſint inter ſe æquales; *d* ſintque ſimul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc eſt, acutus. Si enim rectus foret, aut obtuſus, eſſent ambo vel duobus rectis æquales, aut majores.

xviij. THEOR. 11. PROPOS. 18.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

TAB. IV. fig. 10. IN triangulo ABC, ſit latus AC, majus latere AB. Dico angulum ABC, ſubtenſum à majori latere AC, majorem eſſe angulo ACB, qui à minori latere AB, ſubtenditur. Nam ex
a 3. primi AC, *a* auferatur AD, æqualis ipſi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera
b 5. primi AB, AD, æqualia ſunt per conſtructionem, *b* erunt anguli ABD, ADB, æquales: Eſt autem
c 16 prim. *c* angulus ADB, major angulo ACB. Igitur & angulus ABD, major erit angulo ACB. Qua-
d 9. prim. mobrem cum *d* angulus totus ABC, major adhuc ſit angulo ABD; erit angulus ABC, multo major angulo ACB. Eadem ratione, ſi latus AC, majus ponatur latere BC, oſtendes angulum ABC, majorem eſſe angulo BAC; ſi nimirum ex CA, abſcindatur linea æqualis ipſi CB, &c. Quare omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM.

TAB. IV. fig. 11. Ex hoc ſequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni eſſe inæquales. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cujus

Digitized by Google

cujus maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico ejuſdem omnes angulos inæquales eſſe. Cum enim latus AC, ponatur majus latere AB, erit per hanc propoſ. angulus B, angulo C, major. Eadem ratione major erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, majus ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter utrumque tenens.

THEOR. 12. PROPOS. 19. XIX.

Omnis trianguli major angulus majori lateri ſubtenditur.

IN triangulo ABC, angulus B, major ſit angulo C. Dico latus AC, ſubtendens majorem angulum B, majus eſſe latere AB, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus AC, majus non eſt latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale eſſe ipſi AB, *a* erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & major per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero AC, minus eſſe dicatur latere AB, *d* erit angulus B, ſubtenſus à minori latere AC, minor angulo C, ſubtenſo à majore latere AB; Ponitur autem major, quod magis eſt abſurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale ſit lateri AB, neque minus eo, erit majus. Eadem ratione probabitur, latus AC, majus eſſe latere BC, ſi angulus B, major eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli major angulus majori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.

TAB. IV. fig. 11.

a *5. primi*

d *18. primi*

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propoſ. omnium rectarum ex quovis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis eſt, eſſe minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD, ſola ſit perpendicularis ad BC,

TAB. IV. fig. 12.

BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam ſola una perpendicularis duci poſſit, ut ex Proclo ad propoſ. 17. demonſtravimus. Dico omnium minimam eſſe AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli
b 17. primi ADE, AED, *b* ſint duobus rectis minores, ponaturque
c 19. primi ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare *c* majus erit latus AE, latere AD. Eodem modo oſtendemus, omnes alias rectas majores eſſe recta AD, ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

XX. THEOR. 13. PROPOS. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt majora, quomodocunque aſſumpta.

TAB. IV. fig. 13. Sit triangulum ABC. Dico quælibet ejus duo latera, nempe AB, AC, ſimul majora eſſe reliquo latere BC. Producatur unum ex illis,
e 3. primi ut CA, uſque ad D, *e* ſitque recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD,
f 5. primi æqualia inter ſe ſunt, per conſtructionem, *f* erunt anguli ABD, ADB, æquales inter ſe: Eſt autem
g 9. pron. angulo ABD, *g* major angulus CBD. Igitur & angulus CBD, major erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppoſitum majori
h 19. primi angulo CBD, *h* majus erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, ſimul æqualia ſint ipſi CD, (ſi enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC,
i 2. pron. *i* fient tota æqualia; nimirum linea compoſita ex AB, AC, & linea compoſita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, ſimul majora latere BC. Eodem modo demonſtrabitur, quælibet alia duo latera majora eſſe reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo ſunt majora, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxi.

Si ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

In triangulo ABC, ſuper extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ BD, CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, ſimul minores eſſe duobus lateribus BA, CA, ſimul; At vero angulum BDC, majorem angulo BAC. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE, *e* majora ſunt latere BE, ſi addatur commune EC, *a* erunt BA, AC, majora, quam BE, EC. Rurſus quia in triangulo CED, duo latera CE, ED, *b* majora ſunt latere CD, ſi commune apponatur DB, *c* erunt CE, EB, majora, quam CD, DB. Oſtenſum vero jam fuit, AB, AC, majora eſſe, quam BE, EC. Multo igitur majora erunt BA, CA, quam BD, CD, quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus BDC, *d* major eſt angulo DEC, externus interno; & angulus DEC, angulo BAC, major quoque eſt, eandem ob cauſam. Erit angulus BDC, multo major angulo BAC, quod ſecundo proponebatur. Si igitur ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.

TAB. IV. fig. 14.
e 20 primi
a 4. pron.
b 20 primi
c 4. pron.
d 16. primi

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

Ex tribus rectis lineis, quæ ſint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe majores

jores omnifariam ſumptas: quoniam uniuſcujuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt majora.

TAB. IV. fig. 15. TRes lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint majores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, ut conſtat ex propoſition. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quævis latera trianguli reliquo eſſe majora.) oporteatque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quavis DE, infinitæ magnitudinis

a 3. primi *a* abſcindatur recta DF, æqualis rectæ A. Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, intervallo vero FD, circulus deſcribatur DIK. Item centro G, intervallo autem GH, alius circulus deſcribatur HIK, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, majores ponantur recta FG; ſi ex FE, ſumatur recta FL, æqualis ipſi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipſi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque

fig. 16. M, caderet in L, punctum, eſſent GM, FL,

TAB. V. hoc eſt, GH, & FD, æquales rectæ FG: Si vero

fig. 1. M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ FL, GM, hoc eſt, DF, GH, minores recta FG, quorum utrumque eſt contra hypotheſin. Id

TAB. IV. quod ex appoſitis figuris apparet) ex quorum

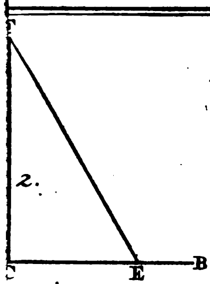
fig. 15. quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cujus latera dico æqualia eſſe datis

b 15. def. rectis A, B, & C. Cum enim recta FK, *b* æqualis ſit rectæ FD, & recta A, per conſtructio-

a 1. prim. nem eidem FD, æqualis; *a* erit latus FK, rectæ A, æquale. Rurſus quia GK, æqualis eſt ipſi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt.

Digitized by Google

TAB. IV.



2.

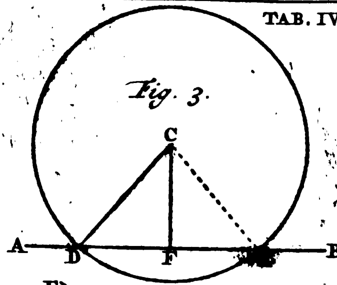


Fig. 3.

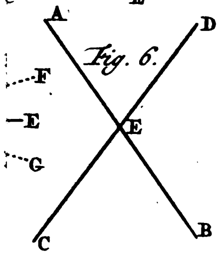


Fig. 6.

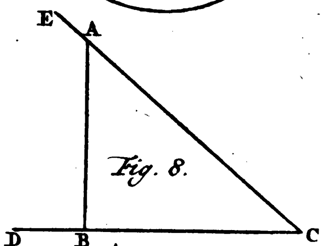


Fig. 8.

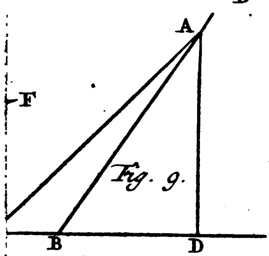


Fig. 9.

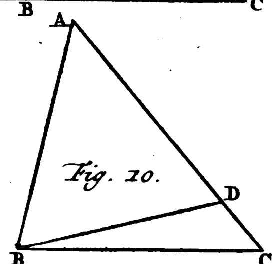


Fig. 10.

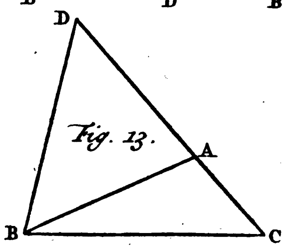


Fig. 13.

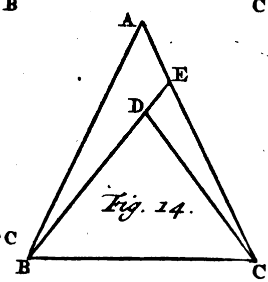


Fig. 14.

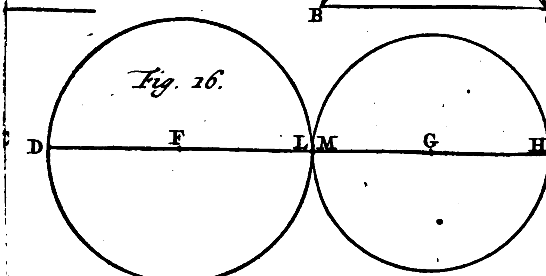
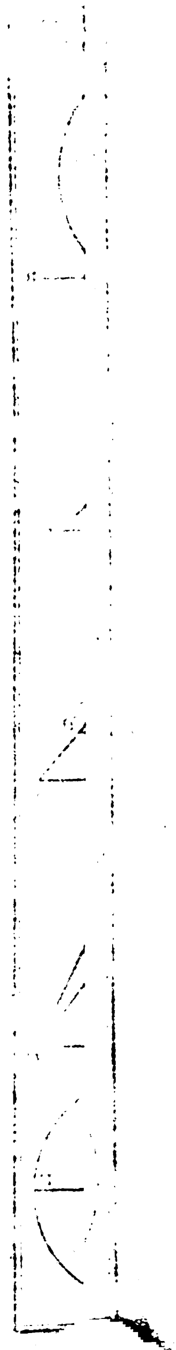


Fig. 26.

Digitized by Google



Digitized by Google

ſunt. Conſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiij.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

DAta recta ſit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum conſtituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta utcunque G, H, quæ recta GH, connectantur: Deinde *a* conſtituatur triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita ut CI, æquale ſit ipſi EG; & CK, ipſi EH; & IK, ipſi GH. (Quod facile fiet, ſi CI, ſumatur æqualis ipſi EG, & CL, ipſi EH, & IM, ipſi GH. Deinde ex centris C, & I, intervallis vero CL, & IM, circuli deſcribantur ſecantes ſeſe in K, &c.) Dico angulum C, æqualem eſſe angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia ſunt duobus lateribus EG, EH, utrumque utrique, & baſis IK, baſi GH, per conſtructionem; *b* erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

TAB. V. fig. 2.

a 22 primi

b 8. primi

THEOR. 15. PROPOS. 24. xxiv.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint; utrumque utrique, angulum vero angulo majorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi majorem habebunt.

DUo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus, DE, DF, trianguli DEF, utrum-

TAB. V. fig. 3.

 que

que utrique, nempe AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; Angulus vero A, major ſit angulo EDF. Dico Baſin BC; majorem eſſe baſe EF. Ad lineam
b 23 primi enim DE, ad ejuſque punctum D, *b* conſtituatur angulus EDG, æqualis angulo A; (cadetque recta DG, extra triangulum DEF, cum angulus EDF, minor ponatur angulo A) ponaturque
c 3. primi DG, æqualis ipſi DF, *c* hoc eſt, ipſi AC. Ducta deinde recta EG; cadet ea aut ſupra rectam EF; aut in ipſam, aut infra ipſam. Cadat primum ſupra EF, ducaturque recta FG. Quia ergo latera AB, AC, æqualia ſunt lateribus DE, DG, utrumque utrique, & angulus A, æqualis angulo
d 4. primi EDG, per conſtructionem: *d* Erit baſis BC, baſi EG, æqualis. Rurſus quia duo latera DF, DG,
e 5. primi inter ſe ſunt æqualia; *e* erunt anguli DFG, DGF,
f 9 pron. æquales: Eſt autem angulus DGF, *f* major angulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, major erit. Quare multo major erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In
a 19. primi triangulo igitur EFG, *a* majus erit latus EG, latere EF. Eſt autem oſtenſum EG, æquale eſſe ipſi BC. Major igitur erit quoque BC, quam EF. Quod eſt propoſitum.

Cadat deinde EG, (ut in figura 4.) in ipſam EF.
b 4 primi Et quia rurſus, ut prius, baſis EG, *b* æqualis
c 9. pron. eſt baſi BC: & EG, *c* major quam EF, erit & BC, major, quam EF, quod eſt propoſitum.

TAB. V. fig. 5. Cadat tertio EG, infra EF, producanturque rectæ DF, DG, uſque ad H, & I, & ducatur
d 4. primi recta FG. Erit autem rurſus, ut prius, *d* baſis EG, baſi BC, æqualis. Deinde quia duo latera DF, DG, æqualia ſunt inter ſe, per conſtructio-
e 5. primi nem, *e* erunt anguli GFH, FGI, infra baſin FG,
f 9. pron. æquales: Eſt autem angulus FGI, *f* major angulo FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo FGE, major erit. Quare multo major erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangu-
g 19. primi lo ergo EFG, *g* majus erit latus EG, latere EF. Eſt autem oſtenſum EG, æquale eſſe ipſi BC. Major igitur erit quoque BC baſis, baſi EF. Si-

igitur

igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 25. xxv.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique, baſin vero baſi majorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo majorem habebunt.

DUo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF; utrumque utrique, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; Baſis autem BC, major ſit baſe EF. Dico angulum A, majorem eſſe angulo D. Si enim non eſt angulus A, major angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur eſſe æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia ſint duobus circa D, utrumque utrique, per hypotheſin; *a* erit & baſis BC, æqualis baſi EF; quod eſt abſurdum. Ponitur enim baſis BC, baſe EF, major: Si vero angulus A, dicatur eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis EF, *b* major baſe BC; quod magis eſt abſurdum, cum EF, ponatur eſſe minor quam BC. Quare angulus A, cum neque poſſit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit major. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

TAB. V. fig. 6.

a 4 *primi*

b 24 *primi*

THEOR. 17. PROPOS. 26. xxvi.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique, unumque latus uni lateri æquale, ſive quod æqualibus adjacet angulis, ſeu quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque

Digitized by Google

utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

TAB. V. fig. 7. SInt duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, uterque utrique, hoc eſt, B, ipſi E, & C, ipſi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adjacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adjacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia eſſe, utrumque utrique, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus AB, non eſt æquale lateri DE, ſit DE, majus, c 3. primi à quo *c* abſcindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus GE, EF, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales d 4. primi per hypotheſin: *d* Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars toti; Quod eſt abſur- e 9. pron. dum *e*, Non eſt igitur latus AB, inæquale lateri DE, ſed æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia ſint lateribus DE, EF, utrumque utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; a 4. primi *a* erunt & baſes AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales, Quod eſt propoſitum.

TAB V. fig. 8. Sint deinde latera AB, DE, ſubtendentia æquales angulos C, & EFD, inter ſe æqualia. Dico rurſus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, eſſe æqualia, utrumque utrique, hoc eſt, BC, ipſi EF, & CA, ipſi FD; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non eſt æquale lateri EF, ſit b 3. primi EF, majus: *b* ex quo ſumatur recta EG, æqualis ipſi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus DE, EG, utrumque utrique, & anguli contenti B, & c 4. primi E, æquales, per hypotheſin; *c* Erit angulus C, angulo

angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & oppoſito, quod eſt abſurdum. *d* Eſt enim major. Non ergo eſt latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur inſtitutum ex 4. propoſ. hujus libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonſtrandum erat. d 16 primi

COROLLARIUM.

Sequitur ex demonſtratione hujus theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, eſſe æqualia. Nam ſi latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia ſint, ut oſtenſum fuit, contineantque ex hypotheſi angulos æquales B, E, *e* erunt tota quoque triangula æqualia inter ſe. e 4. primi

THEOR. 18. PROPOS. 27. xxvij.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea, alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter ſe æquales. Dico lineas AB, CD, eſſe parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, coibunt tandem, ſi producantur infinite. Si namque non coirent unquam, parallelæ eſſent, ex parallelarum definitione. Conveniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum eſt GIH, (cum AB, recta continuata ſit, item recta CD, uſque ad punctum I;) & angulus AGH, poſitus eſt æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & oppoſito DHG; quod eſt abſurdum; *a* quoniam externus interno major eſt. Quod ſi AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rurſus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno & oppoſito, AGH, quod eſt abſurdum. Non igitur TAB. V. fig. 9. a 16 primi

D 5 coi-

Digitized by Google

coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonſtrabitur, lineas AB, CD, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum.

xxviij. THEOR. 19. PROPOS. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

TAB. V. fig. 10. IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, eſſe parallelas. Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur
a 15 primi angulus GHC; & eidem angulo EGA, *a* æqua-
b 1. pron. lis eſt angulus HGB; *b* erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales. Quare lineæ AB, CD,
c 27. primi *c* parallelæ erunt. Idem oſtendetur, ſi angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.

Deinde faciat recta EF; angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rurſus rectas AB, CD, eſſe parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem &
a 13. primi anguli AGE, AGH, *a* duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis
b 12. pron. AGE, AGH, æquales *b*. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & oppoſito ad eaſdem partes æqualis. Quare ut jam oſtenſum eſt, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem oſtendetur, ſi duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas

recta

recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.]

THEOR. 20. PROPOS. 29. xxix.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter ſe eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit alter, nempe AGH, major. Quoniam igitur angulus AGH, major eſt angulo DHG, ſi addatur communis angulus BGH, *a* erunt duo AGH, BGH, majores duobus DHG, BGH: At duo AGH, BGH, *b* æquales ſunt duobus rectis Igitur duo DHG, BGH, minores ſunt duobus rectis. Quare cum ſint interni, & ad eaſdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod eſt abſurdum, cum ponantur eſſe parallelæ. Non eſt igitur angulus AGH, major angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione oſtenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli, alterni AGH, DHG. Eademque eſt ratio de angulis alternis BGH, CHG. *TAB. V. fig. 10.* *a 4. pron.* *b 13. primi* *c 13. pron.*

Dico ſecundo, angulum externum AGE, æqualem eſſe interno, & ad eaſdem partes oppoſito CHG. Quoniam enim angulo BGH, æqualis eſt alternus CHG, ut oſtenſum eſt; & eidem BGH; *d* æqualis eſt angulus AGE. Erunt anguli AGE, CHG, *e* inter ſe quoque æquales. Eodem modo demonſtrabitur, angulum BGE, æqualem eſſe angulo DHG. *d 15. primi* *e 1. pron.*

Dico tertio, angulos internos ad eaſdem partes, AGH, CHG, æquales eſſe duobus rectis. Quo-

Digitized by Google

Quoniam enim oſtenſum fuit, angulum externum AGE, æqualem eſſe angulo CHE, interno; ſi
a 2. pron. addatur communis AGH, *a* erunt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo
b 13 primi AGE, AGH, *b* æquales ſunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxx. THEOR. 21. PROPOS. 30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ & inter ſe ſunt parallelæ.

TAB. V. fig. 11. Sint rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipſas AB, CD, eſſe inter ſe parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur eſſe plano, (Nam in propoſ. 9. undecimi libri agetur de lineis in diverſis planis) ducta recta GH, ſecabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur
c 29 primi parallela ipſi EF, *c* erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rurſus quia CD, ponitur etiam
d 29 primi parallela ipſi EF, *d* erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI,
e 1. pron. *e* æquales inter ſe quoque erunt. Cum igitur
f 27 primi ſint alterni, *f* erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter ſe. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ. Quod demonſtrandum erat.

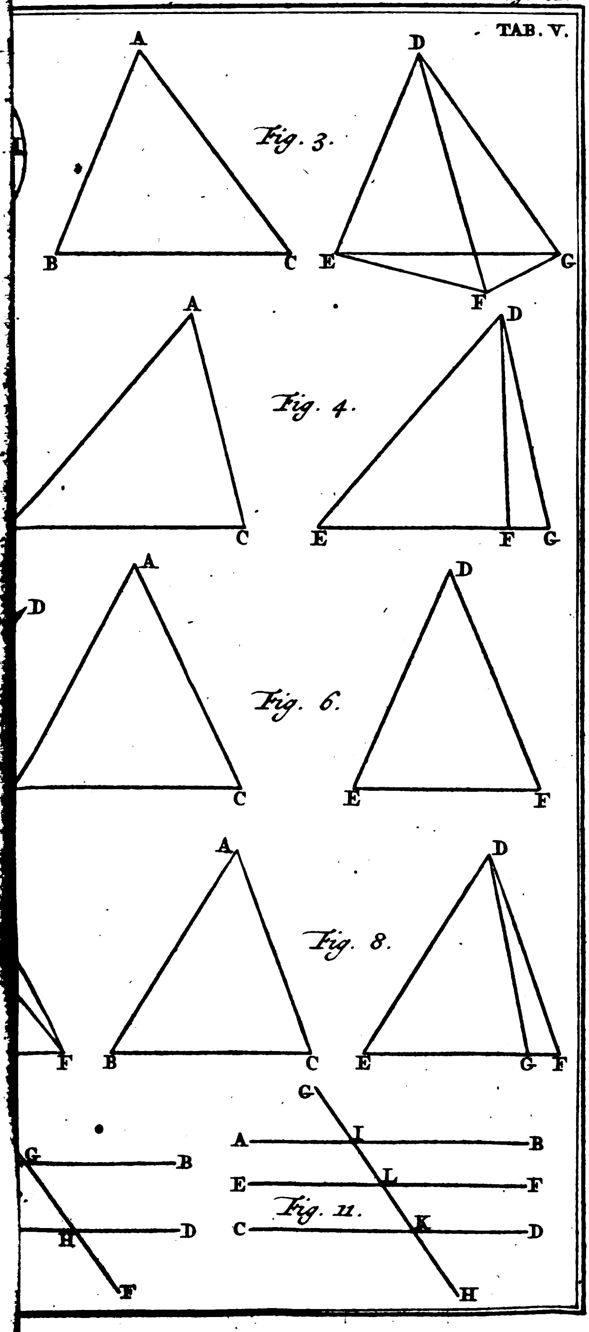
xxxi. PROBL. 10. PROPOS. 31.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

TAB. VI. fig. 1. Ex puncto A, ducenda ſit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, ut-

Digitized by Google

TAB. V.


Fig. 3.
A
B
C
D
E
G
F
Fig. 4.
A
C
D
E
F
G
Fig. 6.
D
A
C
D
E
F
Fig. 8.
A
D
F
B
C
E
G
F
Fig. 11.
G
A
I
B
E
L
F
C
K
D
H
G
B
D
H
F

Digitized by Google

utcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, *e* æqualis conſtituatur EAD. Dico rectam EA, extenſam ad F, quantumlibet, parallelam eſſe ipſi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales ſint, per conſtructionem, *f* Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

e 23 *primi*

f 27 *primi*

THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij.

Cujuſcunque trianguli uno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

PRoducatur in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primo, angulum externum ACD, æqualem eſſe duobus internis, & oppoſitis ſimul A, & B. *b* Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, *a* erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rurſus, quia recta BD, in eaſdem parallelas incidit, *b* erit angulus externus DCE, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus ACE, & A, itidem æqualibus ECD, & B. *c* fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE; ACE, componitur) duobus A, & B, ſimul æqualis. Quod eſt propoſitum.

TAB. VI. fig. 2.

b 31 *primi*

a 29 *primi*

b 29 *primi*

c 2. *pron.*

Dico ſecundo, tres angulos internos ejuſdem trianguli A, B, & ACB, duobus eſſe rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, ut oſtenſum fuit, æqualis ſit duobus internis A, & B; ſi addatur communis ACB, *d* erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, *e* æquales ſunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, ACB, duobus ſunt rectis æquales. Quare cujuſcunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 2. *pron.*

e 13 *primi*

SCHO-

SCHOLIUM.

Omnes anguli figuræ rectilineæ cujuſvis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos.

TAB. XV fig. 6. 7. 8. *Hoc eſt, anguli cujuslibet trianguli æquales ſunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20 latera æquivalebunt bis 20. angulis rectis minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonſtratio autem hujus rei talis eſt. Si à quovis puncto A, intra figuram aſſumpto ad omnes angulos B, C, D, vel B, C, D, E, vel B, C, D, E, F, rectæ lineæ AD, AB, AC. vel AB, AC, AD, AE, vel AB, AC, AD, AE, AF, ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, anguloſve figura ipſa continet.* a 32 primi *Cum igitur anguli cujuſcunque trianguli a æquales ſint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum A, intra figuram aſſumptum conſiſtentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propoſitæ, ut conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos figuræ propoſitæ, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis circa punctum A, aſſumptum conſtitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot ſint, circa dictum punctum A, exiſtentes æquales 4. rectis tantummodo, ut collegimus ex propoſ. 15. Quamobrem anguli cujuſque figuræ bis tot rectis ſunt æquales, ablatis quatuor, quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera, quod eſt propoſitum.*

COROLLARIUM. I.

Ex hac propoſ. 32. colligitur, tres angulos cujuslibet trianguli ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis cujuſque alterius trianguli ſimul ſumptis: Quoniam tam illi

tres,

tres, quam hi *g* æquales ſunt duobus angulis rectis. Unde ſi duo anguli unius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo hujus æqualis, æquiangulaque erunt ipſa triangula. g 32 primi

COROLLARIUM. II.

Conſtat etiam, in omni triangulo Iſoſcele, cujus angulus lateribus æqualibus comprehenſus rectus fuerit, quemlibet reliquorum eſſe ſemirectum. Nam reliqui duo ſimul conficiunt unum rectum, *h* cum omnes tres ſint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare *i* cum duo reliqui inter ſe ſint æquales, erit quilibet eorum ſemirectus. At vero ſi angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtuſus, quemlibet aliorum eſſe ſemirecto minorem. Reliqui enim duo ſimul minores erunt uno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, utrumque reliquorum majorem eſſe ſemirecto. Quoniam reliqui duo ſimul majores erunt uno recto, &c.

h 32 primi

i 5. primi

COROLLARIUM. III.

Perſpicuum quoque eſt, quemvis angulum trianguli æquilateri eſſe duas tertias partes unius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, *k* quibus æquales ſunt tres anguli trianguli æquilateri, diviſi in tres angulos, faciunt duas tertias partes unius recti.

k 32 primi

COROLLARIUM. IV.

Liquet etiam, ſi ab uno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppoſitum ducatur, conſtitui duo triangula ſcalena, quorum unumquodque habet unum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes unius recti, illum ſcilicet, qui eſt & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem unius recti.

THEOR.

Digitized by Google

xxxiij. THEOR. 23. PROPOS. 33.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem conjungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

TAB. VI. fig. 3. Sint rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipſas autem conjungant ad eaſdem partes rectæ AD, BC. Dico AD, BC, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta AC. Quoniam igitur AC, incidit in parallelas AB, *d 29 primi* CD, *d* erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Quare cum duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia ſint duobus lateribus CD, CA, trianguli CDA, utrumque utrique, & anguli *a 4. primi* quoque dictis lateribus incluſi æquales; *a* erunt baſes BC, AD, æquales, & angulus ACB, angulo DAC, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint *b 27 primi* alterni inter rectas AD, BC, *b* erunt AD, BC, parallelæ: Probatum autem jam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxxiv. THEOR. 24. PROPOS. 34.

Parallelogrammorum ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex adverſo & latera, & anguli; atque illa bifariam ſecat diameter.

TAB. VI. fig. 3. Sit parallelogrammum ABCD, quale definivimus definitione 35. Dico latera oppoſita AB, DC, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita AD, BC. Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe; nec non & angulos oppoſitos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. *c 29 primi* Cum enim AB, DC, ſint parallelæ, *c* erunt anguli

Digitized by Google

guli alterni BAC, DCA, æquales. Rurſus quia AD, BC, ſunt parallelæ, *d* erunt & anguli alterni BCA, DAC, æquales. Itaque cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales ſint duobus angulis DCA, DAC, trianguli ADC, uterque utrique, & latus AC, dictis angulis adjacens, commune utrique triangulo; *e* erit recta AB, æqualis oppoſitæ rectæ DC, & recta BC, oppoſitæ rectæ AD, quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis BAC, DCA, addantur æquales anguli DAC, BCA, toti quoque anguli BAD, BCD, *a* fiunt æquales; conſtat ſecundum, angulos nimirum oppoſitos eſſe æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, utrumque utrique, & angulus B, angulo D, æqualis, ut jam oſtendimus; *b* erunt triangula ABC, CDA, æqualia, ideoque parallelogrammum ABCD, diviſum erit bifariam à diametro AC, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex adverſo, &c. Quod oſtendendum erat.

d 29. primi

e 26 primi

a 2. primi

b 4 primi

THEOR. 25. PROPOS. 35. xxxv.

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

INter duas parallelas AB, CD, ſuper baſi CD, exiſtant duo parallelogramma CDEA, CDBF. (Dicuntur autem parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum, ut in exemplo propoſito cernitur.) Dico ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & latera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadet enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelo-

TAB. VI. fig. 4.

Digitized by Google

a 34. primi grammo CDEA, recta AE, *a* æqualis eſt rectæ CD, oppoſitæ, & eidem CD, æqualis eſt FB, in parallelogrammo CDBF, oppoſita; Erunt
b 1. pron. AE, *b* FB, inter ſe æquales. Dempta igitur
c 3. pron. communi FE, *c* remanebit AF, ipſi EB, æqua-
d 34. primi lis: *d* Eſt autem & AC, ipſi ED, oppoſitæ æ-
e 29. primi qualis in parallelogrammo CDEA; *e* & angulus
f 4. primi BED, angulo FAC, externus interno. *f* Quare triangulum FAC; triangulo BED, æquale erit.
g 2. pron. Addito igitur communi trapezio CDEF, *g* fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod eſt propoſitum.

TAB. VI. fig. 5. Cadat ſecundo punctum F, in punctum E. Dico rurſus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia eſſe. Erunt enim, ut prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC;
h 4. primi atque adeo *h* triangula, EAC, BED, æqualia.
i 2. pron. Addito igitur communi triangulo CDE, *i* fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.

TAB. VI. fig. 6. Cadat tertio punctum F, ultra E, ita ut recta CF ſecet rectam DE, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ AE, FB, ſunt æquales; ſi commu-
k 2. pron. nis addatur EF; *k* erit tota AF, toti EB, æqualis, nec non & anguli BED, FAC, æquales
l 4. primi erunt; atque adeo *l* triangulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo
m 3. pron. EGF, *m* remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

xxxvi. THEOR. 26. PROPOS. 36.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta; inter ſe ſunt æqualia.

TAB. VI. fig. 7. SInt duo parallelogramma ACEF, GHDB, ſuper æquales baſes CE, HD, inter eaſdem

paral-

parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, *o* æqualis eſt GB, in parallelogrammo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, *p* æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas conjungentes, *q* parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, *r* erit parallelogrammum ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, *s* erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, *t* inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.

o 34. *primi* p 1. *pron.* q 33. *primi* r 35. *primi* s 35. *primi* t 1. *pron.*

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvii.

Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

INter parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, ſint conſtituta duo triangula ACD, BCD. (Dicitur autem triangulum inter duas eſſe parallelas conſtitutum, quando baſis eſt pars unius, & angulus oppoſitus alteram attingit.) Dico ea triangula eſſe æqualia. Per D, enim *i* ducatur DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ BC. *k* Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim ſuper eandem baſin, CD, & inter eaſdem parallelas. Sed horum dimidia ſunt triangula ACD, BCD; *l* quod AD, BD, diametri bifariam ſecent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, *m* æqualia erunt. Triangula igitur ſu-

TAB. VI. fig. 8. i 31. *primi* k 35. *primi* l 34. *primi* m 7. *pron.*

per eadem baſi, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxxviij. THEOR. 28. PROPOS. 38.

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

TAB. VI. fig. 9. INter parallelas AB, CD, & ſuper æquales baſes CE, FD, ſint conſtituta triangula ACE,
x 31. *primi* BFD. Dico ipſa eſſe æqualia. *x* Ducatur enim EG, parallela ipſi AC, & DH, ipſi BF: Eruntque
y 36. *primi* *y* parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia.
z 34. *primi* Cum igitur horum *z* dimidia ſint triangula ACE,
a 7. *pron.* BFD; *a* erunt hæc inter ſe æqualia. Triangula ergo ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat oſtendendum.

xxxix. THEOR. 29. PROPOS. 39.

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta; & in eiſdem ſunt parallelis.

TAB VI. fig. 10. SInt duo triangula æqualia, ABC, DBC, ſuper eandem baſin BC, & ad eaſdem partes. Dico ipſa eſſe inter eaſdem parallelas conſtituta, hoc eſt, rectam ductam AD, parallelam eſſe ipſi BC.
a 31. *primi* Si enim non eſt, *a* ducatur ex A, parallela ipſi BC, quæ vel cadet ſupra AD, vel infra. Cadat primum ſupra, qualis eſt AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam
b 37. *primi* igitur parallelæ ſunt AE, BC, *b* erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Eſt autem per hypotheſin, triangulum quoque DBC, æquale
c 1. *pron.* eidem triangulo ABC. Igitur *c* erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis eſt AF; ducta recta FC, erunt

eadem

eadem ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod eſt abſurdum. Erit igitur AD, parallela ipſi BC. Quare triangula æqualia ſuper eadem baſi, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 30. PROPOS. 40. xxxx.

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem ſunt parallelis.

Sint duo triangula æqualia ABC, DEF, ſuper baſes æquales BC, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ BF. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi BF, per A, ducta vel ſupra AD, vel infra. Cadat primum ſupra, coeatque cum ED, producta in G, & ducatur recta GF. Quoniam igitur parallelæ ſunt AG, BF, *i* erit triangulum EFG, triangulo ABC, æquale: Ponitur autem & triangulum DEF, eidem triangulo ABC, æquale. Igitur *k* triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis eſt, AH; ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, æqualia, pars & totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur AD, parallela ipſi BF. Quare triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

TAB. VI. fig. 11.

i 38. primi

k 1. pron.

THEOR. 31. PROPOS. 41. xlj.

Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit; in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

Inter parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, conſtituantur parallelogrammum ACDE, & trian-

TAB. VI. fig. 12.

triangulum BCD. Dico parallelogrammum eſſe duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro
a 37. primi AD, in parallelogrammo, erunt *a* triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum
b 34. primi ACDE, duplum eſt trianguli ACD; *b* quod triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter ſe
c 6. pron. ſint. Igitur & trianguli BCD, *c* duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, ſi parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

TAB. VI. fig. 13. *Idem hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodem modo, ſi parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerintque in eiſdem parallelis, ut cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum baſes CD, FG, æquales ſunt. Ducta enim diametro AD, in*
g 38. primi *parallelogrammo,* g *erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE,*
h 34. primi *duplum ſit trianguli ACD:* h *quod diameter AD,*
i 6. pron. *ſecet parallelogrammum ACDE, biſariam:* i *erit quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione ſi baſis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc eſſet duplum etiam trianguli BFG, &c.*

xlij. PROBL. 11. PROPOS. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

TAB. VI. fig. 14. DAtum triangulum ſit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Dividatur
a 10. primi latus unum trianguli, nempe BC, *a* bifariam in
b 23. primi E, & *b* fiat angulus CEF, æqualis angulo D,

pro ut

Digitized by Google

pro ut libet, hoc eſt, ſive angulus CEF, vergat ad partes C, ſive ad partes B, pro ut magis videbitur expedire. Ducatur item per A, *c* recta AF, parallela ipſi BC, quæ ſecet EF, in F. Rurſus per C, vel B, ducatur ipſi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G, Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus eſt æqualis, conſtitutum parallelogrammum CEFG, quod dico eſſe æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA, quoniam parallelogrammum CEFG, *d* duplum eſt trianguli AEC, & triangulum ABC, duplum ejuſdem trianguli AEC, *e* quod triangula AEC, ABE, ſuper æquales baſes EC, BE, & in eiſdem parallelis, ſint æqualia. Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, *f* æqualia inter ſe. Cum igitur angulus CEF, factus ſit æqualis angulo D, conſtat propoſitum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

c 31 *primi*
d 41. *primi*
e 38. *primi*
f 6. *pron.*

THEOR. 32. PROPOS. 43. xliij.

In omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

IN parallelogrammo ABCD, ſint circa diametrum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, ut in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter ſe eſſe æqualia. Cum *a* enim triangula ABC, CDA, æqualia ſint; Itemque triangula AEG, GHA; ſi hæc ab illis demantur, *b* remanebunt trapezia CBEG, CDHG, æqualia: *c* Sunt autem & triangula CGI, CGF, æqualia. Quare ſi detrahantur ex trapeziis, *d* remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa &c. Quod oſtendendum erat.

TAB VII. fig. 1.
a 34. *primi*
b 3. *pron.*
c 34. *primi*
d 3. *pron.*

Digitized by Google

xliv. **PROBL. 12. PROPOS. 44.**

Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

TAB. VII. fig. 2. DAta recta linea ſit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & unum latus æquale rectæ A. Conſtituatur triangulo B, *a* æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producaturque GF, ad H, ut FH, ſit æqualis rectæ A, & per H, *b* ducatur HI, parallela ipſi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & *c* per K, ducatur KL, parallela ipſi GH, ſecans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, eſſe id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, *d* cum angulus HFM, æqualis ſit angulo EFG, qui factus eſt æqualis angulo C: Denique parallelogrammum LMFH, æquale eſt triangulo B, *e* cum æquale ſit complemento DEFG, quod factum eſt æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

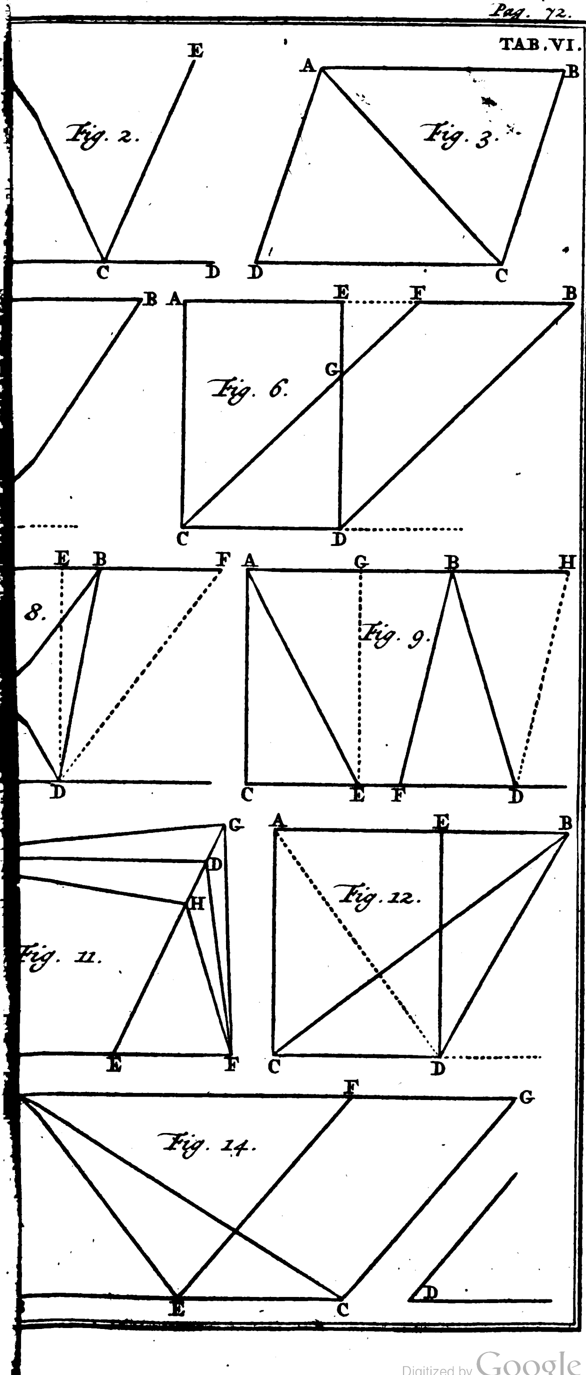
a 42. primi *b 31. primi* *c 31. primi* *d 15. primi* *e 43. primi*

PROBL. 13. PROPOS. 45.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

TAB. VII. fig. 3. QUamvis Euclides proponat hoc problema abſolute, non adſtringendo nos ad certam aliquam

TAB. VI.



Digitized by Google

Digitized by Google

quam rectam lineam datam, ut in præcedenti propoſ. 44. fecerat; tamen quia in ſequentibus frequenter uſurpatur in data recta linea, placuit ipſum proponere una cum data recta linea. Sit ergo recta data EF, rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur conſtruere ad datam rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D. Reſolvatur rectilineum in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, *a* æquale parallelogrammum conſtituatur EFGH, ſuper rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item ſuper rectam GH, parallelogrammum GHIK, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item ſuper rectam IK, parallelogrammum IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et ſic deinceps procedatur, ſi plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod jubetur. Nam tria parallelogramma conſtructa, quæ quidem æqualia ſunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum unum parallelogrammum, quod ſic demonſtratur. Duo anguli EFG, HGK, *b* inter ſe ſunt æquales, cum uterque æqualis ſit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, *c* qui duobus rectis æquivalent, *d* æquales duobus angulis HGK, FGH; ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. *e* Quare FG, GK, unam rectam lineam efficient. Eadem ratione oſtendemus, EH, HI, unam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter ſe ſunt, (*f* cum ſint æquales oppoſitis angulis æqualibus EFG, HGK.) *g* & duo anguli HIK, IHG, duobus ſunt rectis æquales. &c. Cum igitur EI, FK, ſint parallelæ; *h* Itemque EF, IK, quod utraque parallela ſit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonſtrabitur, parallelogrammum IKLM, adjunctum parallelogrammo EFKI, conſtituere totum unum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectili-

a 44. primi
b 1. pron.
c 29. primi
d 2. pron.
e 14. primi
f 34. primi
g 29. primi
h 30. primi

neo ABC, conſtituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

SCHOLIUM.

Datis duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum majoris ſupra minus inquirere.

TAB. VII. fig. 4. 145. primi *Sint data rectilinea A, & B, ſitque A, majus. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, ſuperet rectilineum B, i Fiat parallelogrammum CDEF, in quocunque angulo D, æquale majori rectilineo A. Et ſuper rectam CD, parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, ſuperat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo EFHG, ſuperabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod eſt propoſitum.*

xlv. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A Data recta linea quadratum deſcribere.

TAB. VII. fig. 5. a 11. primi SIt data recta AB, ſuper quam oporteat quadratum deſcribere. Ex A, & B, *a* educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, ſintque ipſi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, eſſe quadratum. Cum enim b 28. primi anguli A, & B, ſint recti, *b* erunt AD, BC, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque c 33. primi æqualis ſit ipſi AB. Igitur *c* & AB, DC, parallelæ ſunt & æquales: & ideo parallelogrammum eſt ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales ſint ipſi AB, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt; ſunt autem & omnes quatuor anguli recti, d 34. primi cum C, & D, *d* æquales ſint oppoſitis rectis A, & B. Quadratum igitur eſt ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 33. PROPOS. 47. xlvii

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur, quadratis.

IN triangulo ABC, angulus BAC, ſit re- TAB. VII.
ctus *a* deſcribanturque ſuper AB, AC, fig. 6.
BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico a 46. primi
quadratum BCDE, deſcriptum ſuper latus
BC, quod angulo recto opponitur, æquale eſſe
duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ ſuper
alia duo latera ſunt deſcripta, ſive hæc duo latera
æqualia ſint, ſive inæqualia. Ducatur enim
recta AK, *b* parallela ipſi BE, vel ipſi CD, ſe- b 31. primi
cans BC, in L, & jungantur rectæ AD, AE,
CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, ſunt
recti, *c* erunt rectæ GA, AC, una linea recta; c 14. primi
eodemque modo IA, AB, una recta linea erunt.
Rurſus quia anguli ABF, CBE, ſunt æquales,
cum ſint recti, ſi addatur communis. angulus
ABC, *d* fiet totus angulus CBF, toti angulo d 2. pron.
ABE, æqualis; ſimiliterque totus angulus BCH,
toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera
AB, BE; trianguli ABE, æqualia ſunt duobus
lateribus FB, BC, trianguli FBC, utrumque utrique,
ut conſtat ex definitione quadrati: Sunt
autem & anguli ABE, FBC, contenti hiſce lateribus
æquales, ut oſtendimus; *e* Erunt triangula e 4. primi
ABE, FBC, æqualia. Eſt autem quadratum,
ſeu parallelogrammum ABFG, *f* duplum trianguli f 41. primi
FBC, cum ſint inter parallelas BF, CG, &
ſuper eandem baſin BF: Et parallelogrammum
BEKL, duplum trianguli ABE, quod ſint inter
parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE.
Quare *g* æqualia erunt quadratum ABFG, & pa- g 6. pron.
rallelogrammum BEKL. Eadem ratione oſten-

detur

detur, æqualia eſſe quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. h Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL; æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod demonſtrandum erat.

h 4. primi

SCHOLIUM.

Si in quadrato quovis diameter ducatur, quadratum à diametro deſcriptum duplum erit prædicti quadrati.

TAB. VII. fig. 5.

In quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratum diametri AC, duplum eſſe quadrati ABCD. Cum enim in triangulo ABC, angulus B, rectus ſit, g erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia ſint, quod lineæ AB, BC, ſint æquales; erit quadratum diametri AC, duplum cujuslibet illorum, ut quadrati lineæ AB, hoc eſt, quadrati ABCD. Quod eſt propoſitum.

g 47. primi

xlvij. THEOR. 34. PROPOS. 48.

Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis; Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

TAB. VII. fig. 7.

DEtur triangulum ABC, ſitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, eſſe rectum. Ducatur namque BD, perpendicularis ad

Digitized by Google

ad BA *k*, & æqualis rectæ BC, connectaturque recta AD. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus eſt; *g* erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Eſt autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eiſdem quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur; *h* erunt quadrata rectarum AD, AC, inter ſe æqualia, ac propterea & rectæ ipſæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur latera BA, BD; trianguli ABD, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; baſis AD, oſtenſa eſt æqualis baſi AC; *i* erunt anguli ABD, ABC, æquales: Eſt autem angulus ABD, ex conſtructione rectus. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab uno laterum trianguli deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

k 11. *primi*
g 47. *primi*
h 1. *pron.*
i 8. *primi*

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTUM SECUNDUM.

AGit Euclides ſecundo hoc libro de potentiis linearum rectarum, inquirendo, quanta ſint & quadrata partium cujuſvis lineæ rectæ diviſæ, & parallelogramma rectangula ſub partibus ejuſdem lineæ diviſæ comprehenſa, tam inter ſe, quam comparata cum quadrato totius lineæ &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonſtranda ſunt, recte intelligenda maximè neceſſaria.

DEFINITIO. I.

Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

HAç definitione exponit, ſub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid ſit, parallelogrammum contineri ſub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum eſt, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cujus

Digitized by Google

cujus omnes anguli ſunt recti. Cujus quidem duo tantum ſunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli ſunt recti, ut perſpicuum eſt ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, ſi unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres neceſſario recti. Sit enim in parallelogrammo ABCD, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque eſſe. Nam cum parallelæ ſint AD, BC, a *erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus eſt, ex hypotheſi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam vero* b *quilibet ſuo oppoſito eſt æqualis, ut angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.* TAB. VII. fig. 8. a 29 primi b 34 primi

Dicit itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri ſub duabus rectis lineis, quæ unum ejus angulum rectum continent. Ut parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur ſub duabus lineis rectis AB, AD; vel ſub AD, DC; vel ſub DC, CB, vel denique ſub AB, BC: quoniam quælibet hujuſmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem ut AB, vel DC, ejus longitudinem, altera vero, ut AD, vel BC, ejus latitudinem. Unde expreſſis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota ejus quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario unius lineæ in alteram hujuſmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB, deorſum ſecundum rectam AD, moveri in tranſverſum, ita ut ſemper angulum rectum cum AD, conſtituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perveniat, deſcriptum

erit

erit totum parallelogrammum ABCD. Idem fiet, ſi AD, ponatur moveri tranſverſum ſecundum rectam, AB, &c. Quamobrem jure optimo ſub talibus duabus lineis rectis continere dicitur parallelogrammum rectangulum.

Itaque parallelogrammum rectangulum; quod ſub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cujus duo latera circa unum angulum rectum æqualia ſunt duabus illis rectis lineis, utrumque utrique. Ut
TAB. VII. fig. 9. *parallelogrammum rectangulum ſub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum ABCD: quoniam latus AB, æquale eſt rectæ E, & latus AD, rectæ F.*

Perſpicuum autem eſt ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum ſub duabus lineis æqualibus eſſe quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis ſit linea oppoſita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

Item manifeſtum eſt, ſi duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque utrique, rectangulum parallelogrammum ſub prioribus duabus comprehenſum, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera unius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonſtrari poteſt. Sint
TAB. VIII. fig. 1. *rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, utraque utrique. Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum ſub AB, BC, æquale eſſe parallelogrammo rectangulo DEFH, contento ſub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli B, & E, æquales,*

TAB. VII.

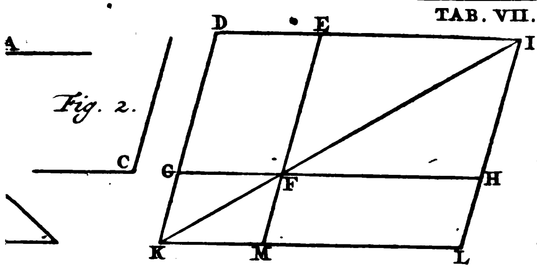


Fig. 2.

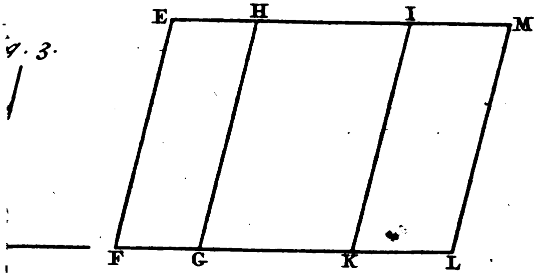


Fig. 3.

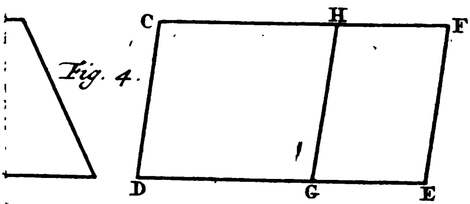


Fig. 4.

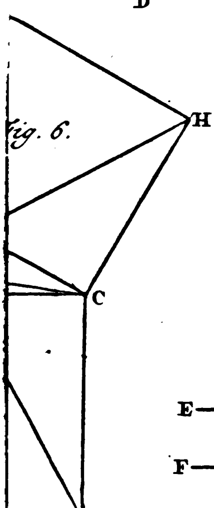


Fig. 6.

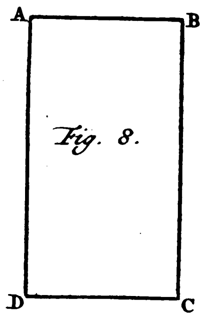


Fig. 8.

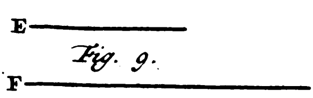


Fig. 9.

Digitized by Google

Digitized by Google

les, nempe recti; erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt. c 4. primi

Obiter quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc ſecundo libro, & in aliis, qui ſequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare ſimpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obſervant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum ſit parallelogrammum rectangulum. Rurſus, ne toties eædem literæ repetantur, ſolent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Ut appoſitum parallelogrammum appellant AC, vel BG. TAB. VIII fig. 1.

DEFINITIO. II.

In omni parallelogrammo ſpatio, unumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo ABCD, ſive rectangulum illud ſit, ſive non, ducatur diameter, AC, ex cujus puncto quolibet G, ducantur rectæ EF, HI, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita ut parallelogrammum diviſum ſit in quatuor parallelogramma, quorum duo EH, IF, dicuntur eſſe circa diametrum, alia vero duo BG, GD, complementa, ut manifeſtum eſt ex ultima definitione primi lib. Itaque figura compoſita ex parallelogrammo utrolibet circa diametrum, ut ex IF, una cum duobus complementis BG, GD, qualis eſt figura EBCDHGE, quam complectitur circumferentia KLM, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura FDABIGF, TAB. VIII fig. 2, 3.

Digitized by Google

compoſita ex parallelogrammo EH, circa diametrum, & duobus complementis BG, GD, Gnomon appellabitur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.

TAB. VIII. fig. 4. SInt duæ rectæ A, & BC, quarum BC, ſecetur quomodocunque in quotlibet ſegmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum ſub A, & BC, comprehenſum æquale eſſe omnibus rectangulis ſimul ſumptis, quæ ſub linea indiviſa A, & quolibet ſegmento comprehenduntur, nempe rectangulo ſub A, & BD; Item ſub A, & DE; Item ſub A, & EC, comprehenſo.

Rectangulum enim BF, comprehendatur ſub A, & BC, hoc eſt, recta GB, æqualis ſit rectæ A. Quod quidem fiet, ſi erigantur ad BC, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, du-
a 28. *primi* caturque recta FG. Nam rectæ BG, CF, *a* parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed &
b 1. *pron.* *b* æquales inter ſe ſunt, quod utraque rectæ A,
c 33. *primi* æqualis ponatur. *c* Igitur erunt quoque FG, BC, parallelæ, & æquales inter ſe: ac proinde rectangulum erit BF, contentum ſub A, ſive GB, & BC, ex defin. 1. hujus lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipſi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ
d 30. *primi* ſint ipſi BG, *d* inter ſe quoque parallelæ erunt. Rurſus eædem, cum ex conſtructione parallelo-
e 34. *primi* gramma ſint BH, BI, *e* æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG,

æqualis

Digitized by Google

æqualis eſt rectæ A, erit rectangulum BH, comprehenſum ſub inſecta linea A, & ſegmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehenſum ſub A, & ſegmento DE. Item rectangulum EF, ſub A, & ſegmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia ſint toti rectangulo BF; perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub A, & BC, æquale eſſe rectangulis omnibus, quæ ſub A, & ſegmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si recta linea ſecta ſit utcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur: æqualia ſunt ei, quod à tota ſit, quadrato.

Recta linea AB, dividatur utcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ AB. *c* Deſcribatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ *a* æqualis erit rectæ AE, hoc eſt, rectæ AB, cui æqualis eſt recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis eſt rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia ſint quadrato AD, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub AB, & ſegmentis AC, CB, æqualia eſſe quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea ſecta ſit utcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. VIII. fig. 5.

c 46. *primi*

a 34. *primi*

Aliter. Sumatur recta D, æqualis rectæ. AB. Quoniam igitur AB, diviſa eſt in C, erit rectan- *TAB. VIII fig. 6.*

 gulum

gulum comprehenſum ſub inſecta D, & recta
b 1. ſec. AB, hoc eſt, quadratum rectæ AB, *b* æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur ſub D, inſecta, hoc eſt, ſub AB, & ſingulis ſegmentis AC, CB, quod eſt propoſitum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si recta linea ſecta ſit utcunque: Rectangulum ſub tota, & uno ſegmentorum comprehenſum æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.

TAB. VIII. fig. 7. 8. LInea recta AB, diviſa ſit utcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota AB, & utrovis ſegmento, ut AC, (ſive hoc ſegmentum majus ſit uti in fig. 7. ſive minus uti in fig. 8.) æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis AC, CB, comprehenſo, & quadrato prioris ſegmenti aſſumpti AC. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmenti AC, quod ſit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipſi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta, rectæ AC, æqualis eſt, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Rurſus, quia recta CD, eadem ratione æqualis eſt rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehenſum ſub ſegmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale ſit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido conſtat, rectangulum ſub AB, tota, & ſegmento AC, comprehenſum eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis AC, CB, & quadrato prædicti ſegmenti AC. Itaque ſi recta linea ſecta ſit utcunque, &c. Quod erat oſtendendum.

TAB. VIII. fig. 9. Aliter. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento AC. Quoniam igitur recta AB, diviſa eſt in C,

erit

Digitized by Google

erit rectangulum comprehenſum ſub D, & AB, hoc eſt, ſub AB, & AC, *a* æquale rectangulo ſub D, & CB, hoc eſt, ſub AC, CB, & rectangulo ſub D, & AC, hoc eſt, quadrato ſegmenti AC. Quod eſt propoſitum. a 1. *ſec.*

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

Si recta linea ſecta ſit utcunque: Quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt & illis, quæ à ſegmentis deſcribuntur, quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.

TAB. VIII, fig. 10.

RECta linea AB diviſa ſit utcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis AC, CB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, ſecans diametrum in G, puncto, per quod rurſus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diviſum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia ſunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis ſunt æquales, & BAE, rectus eſt. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, ſemirecti erunt. Eadem ratione oſtendes angulos DBE, DEB, ſemirectos eſſe. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales ſunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus eſt, *d* cum ſit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, oſtenſus ſemirectus; erit & reliquus EGF, ſemirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum ſint *f* æqualia oppoſitis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia ejus latera

a 5. *primi*
b 32. *primi*
c 32. *primi*
d 29. *primi*
e 6. *primi*
f 34. *primi*

 ſint

Digitized by Google

ſint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod exiſtente uno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti ſunt, ut ad defin. 1. hujus lib. demonſtravimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata ſunt ſegmentorum
g 34 primi AC, CB, quod latus HG, *g* æquale ſit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehenſa erunt ſub ſegmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales ſunt rectæ CB, ob quadratum CI: & FG æqualis rectæ GH, ob qua-
h 34 primi dratum FH, hoc eſt, *h* rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale ſit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; conſtat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo ſub eiſdem ſegmentis AC, CB, bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit utcunque, quadratum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. VIII. fig. 11. Aliter. Quoniam recta AB, diviſa eſt in C,
i 2. ſec. *i* erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem ſub AB, AC,
k 3. ſec. comprehenſum, *k* æquale eſt rectangulo compreſſo ſub AC, CB, & quadrato ſegmenti AC: Item rectangulum ſub AB, CB, comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub CB, AC, comprehenſo, & quadrato ſegmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam eſt quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulis ſub AC, CB, & ſub CB, AC. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIUM I.

Hinc manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

COROLLARIUM II.

Sequitur etiam ex demonſtratione hujus propoſ. 4. diametrum cujuſvis quadrati dividere ejus angulos biſectam.

Digitized by Google

riam. Probatum enim fuit angulos AEB, DEB, eſſe ſemirectos, uti angulos DEB, & DBE. TAB. VIII. fig. 10.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, una cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur, quadrato.

DIvidatur recta AB, biſariam in C, & per inæqualia in D, ut ſectionum intermedia ſit recta CD, qua nimirum dimidia CB, minus ſegmentum DB, ſuperat, vel qua majus ſegmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus AD, DB, comprehenſum, una cum quadrato rectæ CD, quæ inter duas eſt ſectiones, æquale eſſe quadrato dimidiæ CB. Deſcribatur enim CF, quadratum ſuper dimidia CB; & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, ſecans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela IK: Item ex A, rectæ CE, parallela AL, ſecans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propoſ. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta rectæ DB, æqualis: *a* Eſt autem & KH, ipſi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur ſub AD, DB, & KG, erit quadratum rectæ CD; Probandum itaque eſt, rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CF. Quoniam ergo *b* complementa CH, FH, æqualia ſunt; ſi addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI, æquale: *c* Eſt autem & AK, eidem CI, æquale, quod & baſes AC, CB, æquales ſint. Igitur DF, AK, æqualia etiam inter ſe erunt: quibus ſi commune apponatur CH, erit gnomon MNO, rectangulo AH æqualis. Quocirca cum gnomon MNO, &

TAB. VIII. fig. 11.

a 34. primi

b 43. primi

c 36. primi

Digitized by Google

& quadratum KG, æqualia ſint quadrato CF; erit & rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod oſtendendum erat.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adjecta & adjecta, una cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjecta componitur, tanquam ab una, deſcripto.

TAB. VIII. fig. 13. SEcetur recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita AD, & DB, adjecta, una cum quadrato dimidiæ CB, æquale eſſe quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adjecta BD, componitur. Deſcribatur namque CE, quadratum ſuper CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, ſecans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, ſecans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. hujus lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: *a* Eſt autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur ſub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque eſt, rectangulum AI, una cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, *b* æquale eſt parallelogrammo CH, quod baſes AC, CB, æquales ſint: *c* Eſt autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter ſe. Addito ergo communi CI, erit rectangulum

a 34. primi
b 36. primi
c 43. primi

Digitized by Google

gulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, ſint æqualia; erit & rectangulum AI, una cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque ſi recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si recta linea ſecetur utcunque; Quod à tota, quodque ab uno ſegmentorum, utraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

SEcetur recta AB, utcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum ſegmenti ſive majoris, ſive minoris AC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota AB, & dicto ſegmento AC, una cum quadrato reliqui ſegmenti CB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. hujus lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, a æqualis eſt rectæ AC, erit HF, quadratum ſegmenti AC. Rurſus quia AE, æqualis eſt ipſi AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales ſint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, una cum quadrato CI, hoc eſt, gnomoni KLM, una cum quadrato CI, æquale eſt quadratum AD; ſi apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis

TAB. VIII. fig. 14. 15.

a 34. primi

Digitized by Google

AF, DH. (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota AB, & ſegmento AC,) una cum CI, quadrato reliqui ſegmenti CB. Si igitur recta linea ſecetur utcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

viij. THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si recta linea ſecetur utcunque: Rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & uno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tanquam ab una linea deſcribitur, quadrato.

TAB. VIII. fig. 16, 17. Sit recta AB, in C, diviſa utcunque. Dico rectangulum quater comprehenſum ſub AB, & ſegmento ſive majore, ſive minore CB, una cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto ſegmento CB, componitur. Producatur enim AB, verſus dictum ſegmentum CB, ad D, ſitque BD, recta æqualis ſegmento CB; & ſuper tota AD, quadratum deſcribatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipſi DE, ſecantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipſi AD, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. hujus lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, *a* æqualis eſt rectæ AC, (*a* 34. primi) erit OI, quadratum ſegmenti AC. Rurſus *b* quia (*b* 34. primi) NH, æqualis eſt rectæ CB, erit NQ, quadratum ſegmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales ſint. Quare rectæ BH, HQ, æquales ſunt ſegmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehenſa erunt ſub AB, & ſegmento CB, *c* cum LH, ſit æqualis (*c* 34. primi) rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehenſa ſub AB, & CB,

cum

cum NH, HM, rectæ *d* æquales ſint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc eſt, rectæ LH, hoc eſt, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia ſunt; ſi addatur commune KG, erunt BM, KG, ſimul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta AB, & ſegmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia ſint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehenſum ſub data recta AB, & ſegmento CB, una cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compoſitæ ex AB, & dicto ſegmento CB. Quamobrem, ſi recta linea ſecetur utcunque, &c. Quod demonſtrandum erat. d 34. primi

THEOR. 9. PROPOS. 9. viiij.

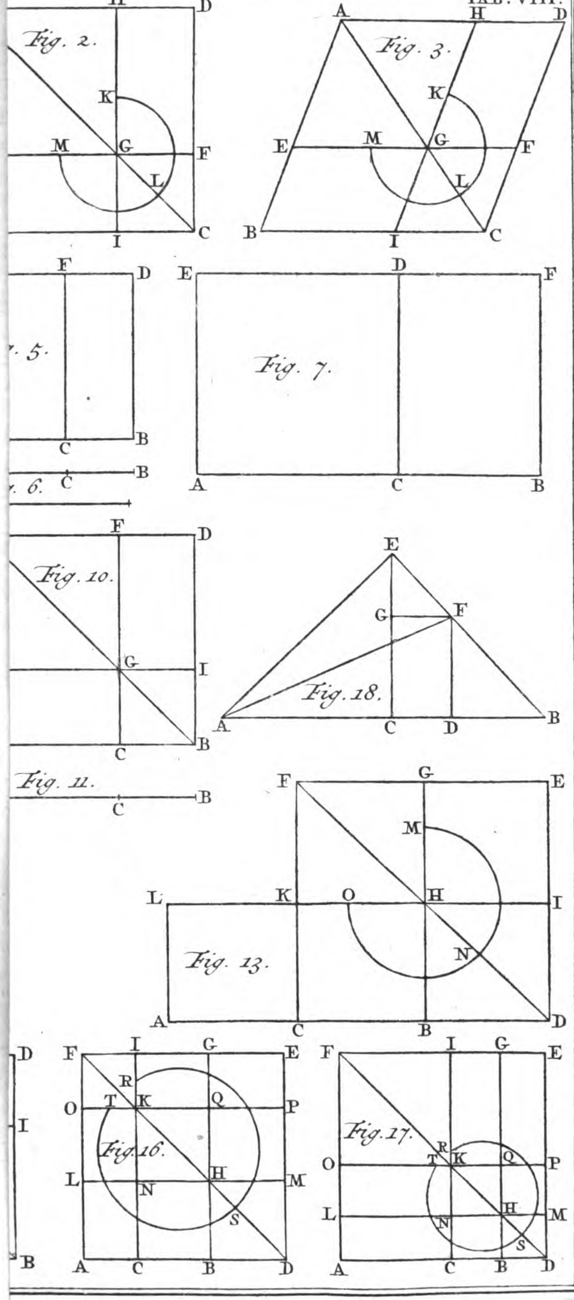
Si recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, ſimul duplicia ſunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

SEcetur recta AB, biſariam in C, & non biſariam in D. Dico quadrata ſegmentorum inæqualium AD, DB, ſimul dupla eſſe quadratorum ſimul, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia ſectionum CD. Educatur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ ſit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, ſecans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipſi AB, ſecans CE, in G, ducaturque tandem AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia ſunt, *a* erunt anguli CAE, CEA, æquales: Eſt autem angulus ACE, rectus: Reliqui igitur *b* anguli alium rectum conficient, ideoque AEC, ſemirectus TAB. VIII. fig. 18. a 5. primi b 32. primi

ctus erit. Eadem ratione angulus BEC, ſemirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rur-
c 29. primi ſus, quia trianguli FGE, angulus EGF, *c* æqua-
d 32. primi lis eſt recto ECB, externus interno; *d* erunt reliqui duo anguli uni recto æquales: Oſtenſum autem eſt, angulum FEG, eſſe ſemirectum. Igitur & EFG, ſemirectus erit, propterea que anguli
e 6. primi EFG, FEG, æquales erunt, *e* ideoque & latera EG, GF, æqualia inter ſe. Eodem modo oſtendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, eſſe æqualia. Nam angulus FDB, eſt rectus, & B, ſemirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE,
f 47. primi angulus C, rectus ſit, *f* erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter ſe ſunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, æquales ſint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rurſus, quia in triangulo EGF, an-
g 47. primi gulus G, rectus eſt, *g* erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata inter ſe æqualia ſunt, ob æqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc
h 34. primi eſt, quadrati lineæ CD. Eſt enim CD, *h* recta rectæ FG, æqualis; cum CF, ſit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla ſunt duorum quadratorum linearum rectarum, AC, CD: Sunt autem duo quadrata recta-
i 47. primi rum AE, EF, *i* æqualia quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla ſunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ DF, æquale eſt quadrato rectæ DB. Oſtenſum enim eſt rectas DF, DB, eſſe æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, ſegmentorum inæqualium, dupla ſunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & intermediæ ſectionum. Si ergo recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

TAB. VIII.



Digitized by Google

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si recta linea ſecetur bifariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque ſimul quadrata, duplicia ſunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod à compoſita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una, deſcriptum ſit, quadrati.

SEcetur recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, ſimul dupla eſſe quadratorum ſimul, quæ ex rectis AC, CD, deſcribuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ ſit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & jungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipſi CE, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G, & per E, ducatur rectæ CD, parallela EF, ſecans DF, in F, jungaturque recta AG. Oſtendetur jam, angulum AEB, eſſe rectum, ut in præcedenti propoſ. & CEB, ſemirectum; *a* ideoque ejus alternum EGF, ſemirectum quoque; *b* Eſt autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. *c* Igitur & reliquus FEG, ſemirectus erit, & propterea ipſi EGF, æqualis. Quare *d* rectæ EF, FG, angulis FEG, EGF, oppoſitæ, æquales quoque erunt. Eadem arte oſtendes, rectas BD, DG, eſſe æquales, propterea quod angulus BDG, ſit rectus, & BGD, ſemirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, *e* æquale eſt quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rurſus quia quadratum rectæ EG, *f* quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale eſt, erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc eſt, rectæ CD, *g* cum CD, recta æqualis ſit re-

TAB. IX. fig. 1.

a 29. primi
b 34. primi
c 32. primi
d 6. primi
e 47. primi
f 47. primi
g 34. primi

ctæ

ctæ EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla ſunt quadratorum ex rectis AC, CD, deſcriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, æquale eſt *b* quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia ſunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis AD, DG, deſcribuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla ſunt quadratorum ex rectis AC, CD, deſcriptorum. Cum igitur quadratum rectæ DG, æquale ſit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, deſcribuntur. Itaque ſi recta linea ſecetur bifariam, &c. Quod oſtendendum erat.

b 47. *primi*

xi. PROBL. I. PROPOS. II.

Datam rectam lineam ſecare, ut comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

TAB. IX. fig. 2. DAta ſit recta AB, quam ſecare oportet in duas partes, ita ut rectangulum comprehenſum ſub tota AB, & altero ejus ſegmento, nempe minori, æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti, nimirum majoris. Deſcribatur ex AB, quadratum AC, & diviſo latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, jungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis ſumatur EF, & ipſi AF, abſcindatur ex recta AB, data æqualis AG. Eſt enim AB, major, quam AF. Nam cum EB, ſit æqualis ipſi EF, ex conſtructione; *a* ſint autem latera AE, AB, majora latere EB; Erunt quoque rectæ EA, AB, majores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, major erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, ſectam eſſe in G, ita ut rectangulum comprehenſum ſub AB, BG, æquale

a 20. *primi*

ſit

Digitized by Google

ſit quadrato rectæ AG; adeo ut AG, ſit majus ſegmentum, & BG, minus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, ſecans CD, in I; Ac per F, ducatur ipſi AG, parallela FH, ſecans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum ſegmenti AG, cum omnia ejus quatuor latera ſint æqualia, quippe cum *b* FH, GH, æqualia ſint oppoſitis AG, AF, æqualibus; omneſque anguli ejuſdem recti ob rectum A, ut ad defin. 1. hujus libri oſtendimus. Rectangulum quoque CG, comprehenſum erit ſub AB, & ſegmento BG; quod AB, æqualis ſit ipſi BC. Itaque probandum eſt, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia eſſe. Quoniam igitur recta DA, diviſa eſt bifariam in E, & ei addita in rectum AF; *c* erit rectangulum ſub DF, FA, hoc eſt, rectangulum DH, (cum FH, ſit æqualis ipſi FA;) una cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc eſt, quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis eſt: Eſt autem quadratum rectæ EB, *d* æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, una cum quadrato rectæ AE, æquale quoque eſt quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc eſt, quadrato AC. Ablato igitur rurſus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter ſe æqualia. Quod eſt propoſitum. Datam igitur rectam AB, ſecuimus, &c. Quod erat faciendum.

b 34. *primi*

c 6. *ſec.*

d 47 *primi*

THEOR. 11. PROPOS. 12. xij.

In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, majus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

TAB. IX. fig. 3. 4. TRiangulum ABC, habeat angulum ABC, obtuſum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuſo angulo opponitur, majus eſſe quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD, hoc eſt, quadratum lateris AC, æquale eſſe duobus quadratis laterum AB, BC, una cum rectangulo ſub CB, BD, bis comprehenſo. Cum
a 4. *ſec.* enim recta CD, diviſa ſit in B, utcunque *a* erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub
b 47. *primi* CB, BD: *b* Eſt autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Cum igitur quadratis
c 47. *primi* rectarum BD, DA, *c* æquale ſit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Quod eſt propoſitum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 13.

In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis

com-

comprehenſo, & ab uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

SInt omnes anguli trianguli ABC, acuti & ex A, perpendicularis AD, demiſſa cadat in latus BC. Dico quadratum lateris AB, quod acuto angulo ACB, opponitur, minus eſſe quadratis laterum AC, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, hoc eſt, quadratum lateris AB, una cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, æquale eſſe duobus quadratis laterum AC, CB. Cum enim recta BC, diviſa ſit in D, utcunque, erunt quadrata rectarum BC, CD, *a* æqualia rectangulo comprehenſo bis ſub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Addito ergo communi quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA: Duobus autem quadratis rectarum CD, DA, *b* æquale eſt quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA, *c* æquale ſit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur, quadrata rectarum AB, BC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD, & quadrato rectæ AC, hoc eſt, quadratum lateris AC, minus eſſe quadratis laterum AB, BC, rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. IX. fig. 5, 6, 7.

a 7. *ſec.*

b 47. *primi*

c 47 *primi*

xiv. PROBL. 2. PROPOS. 14.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

TAB. IX. *fig.* 8, 9. SIt datum rectilineum A, cui quadratum æquale conſtituendum eſt. *a* Conſtituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cujus unum latus, ut DC, producatur ad F, ſitque CF, recta æqualis rectæ BC. Dividatur quoque DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, *b* æqualia ſint oppoſitis lateribus BC, CD; atque adeo conſtitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, deſcribatur intervallo GD, vel GF, ſemicirculus FHD, producaturque BC, donec circumferentiam ſecet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH, eſſe æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH; quia recta DF, dividitur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehenſum ſub DC, CF, hoc eſt, rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC, *c* æquale quadrato rectæ GF, hoc eſt, quadrato rectæ GH; cum rectæ GF, GH, ſint æquales: At quadratum rectæ GH, *d* æquale eſt quadratis rectarum GC, CH. Igitur rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quamobrem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc eſt, rectilineum A; quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum conſtituimus: Quod facere oportebat.

a 45. primi. *fig.* 8. b 34. primi. *fig.* 9. c 5. ſec. d 47. primi.

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTUM TERTIUM.

DEFINITIO. I.

Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ ſunt æquales.

Quoniam Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt uſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumvolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, ut lib. 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri, ſeu recta ex centris ducta, ſunt æquales; vel etiam quorum tota diametri æquales ſunt. Ut ſi diametri AB, BC, vel recta DF, EG, è centris D, & E, ducta ſint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, vel recta è centris ducta æquales. Ex his liquet, circu- TAB. IX. fig. 10. 11.

los, quorum diametri, vel recta ducta ex centris ſunt inæquales, inæquales eſſe; ut ſi diametri BC,
TAB. IX. fig. 11. 12. *HI, vel recta EG, KL, è centris E, & K, ducta ſint inæquales, inæquales erunt circuli BGC, & HLI; atque adeo illum, cujus diameter, vel ſemidiameter major, majorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, ſemidiametroſve inæquales eſſe, majoris quidem majorem, & minoris minorem.*

DEFINITIO. II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.

TAB. IX. fig. 13. *Ut recta AB, ſi ita circulum BFD, tangat in B, ut producta ad C, nulla ratione circulum ſecet, ſed tota jaceat extra ipſum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, ut producta ad G, ſecet circulum, cadatque intra ipſum, non dicetur circulum tangere, ſed ſecare.*

DEFINITIO. III.

Circuli ſe ſe mutuo tangere dicuntur, qui ſeſe mutuo tangentes, ſe ſe mutuo non ſecant.

TAB. IX. fig. 14. 15. *Eodem modo duo circuli AC, BC, ſe mutuo dicuntur tangere in C, ſi ita ſeſe contingant in C, ut neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus*
fig. 15. *circulorum duplex. Aut enim exterius ſe ſe circuli tangunt, ut quando unus extra alterum eſt poſitus;*
fig. 14. *aut interius, quando unus intra alterum conſtituitur. Quod ſi duo circuli ita ſe mutuo tangant, ut unus alterum*

alterum quoque ſecet, dicentur circuli illi ſe mutuo ſecare, & non tangere. Uti circuli ED, & FD. TAB. IX. fig. 16.

DEFINITIO IV.

In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe illa dicitur, in quam major perpendicularis cadit.

QUoniam inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breviſſima eſt perpendicularis, & ſemper eadem; alia vero infinitis modis variari poſſunt; recte diſtantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Ut diſtantia puncti A, à recta TAB. X. *BC, dicitur eſſe perpendicularis AD, non autem* fig. 1. *AE, vel AF, vel alia quævis, quæ non perpendicularis eſt; quia AD, omnibus eſt brevior, ex coroll. propoſ. 19. lib. 1. Immo non ſolum AE, AF, majores ſunt, quam AD, ſed etiam ipſæ inter ſe inæquales ſunt. Eſt enim AF,* a *major,* a 19. primi *quam AE, cum angulus AEF, ſit obtuſus, & AFE, acutus, & ſic de aliis lineis non perpendicularibus. Quod enim AFE, acutus ſit, conſtat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD,* b *minores ſunt duobus rectis. Hinc enim* b 17. primi *fit, cum ADF, rectus ſit, angulum AFD, recto eſſe minorem. Eademratione angulus AED, oſtendetur acutus. Propterea quod in triangulo ADE,* c *duo anguli ADE, AED, minores ſunt duobus* c 17. primi *rectis, & ADE, rectus eſt, ac proinde, cum ambo AED, AEF,* d *æquales ſint duobus rectis, erit* d 13. primi *AEF, obtuſus. Hinc factum eſt, ut Euclides æ-*

qualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales. Ut duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, æqualiter dicentur diſtare à centro E, ſi perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abeſſe dicetur à centro E, quam linea HI, ſi perpendicularis EG, major fuerit perpendiculari EK.

TAB. X. fig. 2.

DEFINITIO. V.

Segmentum circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

TAB. X. fig. 3.

UT ſi ducatur in circulo ABCD, recta BD, utcunque, dicetur tam figura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quam figura BCD, comprehenſa recta BD, & circumferentia BCD, circuli ſegmentum. Ex his colligitur triplex circuli ſegmentum. Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit; Segmentum ſemicirculo majus, quando recta BD, non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum BAD; Et Segmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cujuſmodi eſt ſegmentum BCD. Vocatur à pleriſque Geometris recta BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.

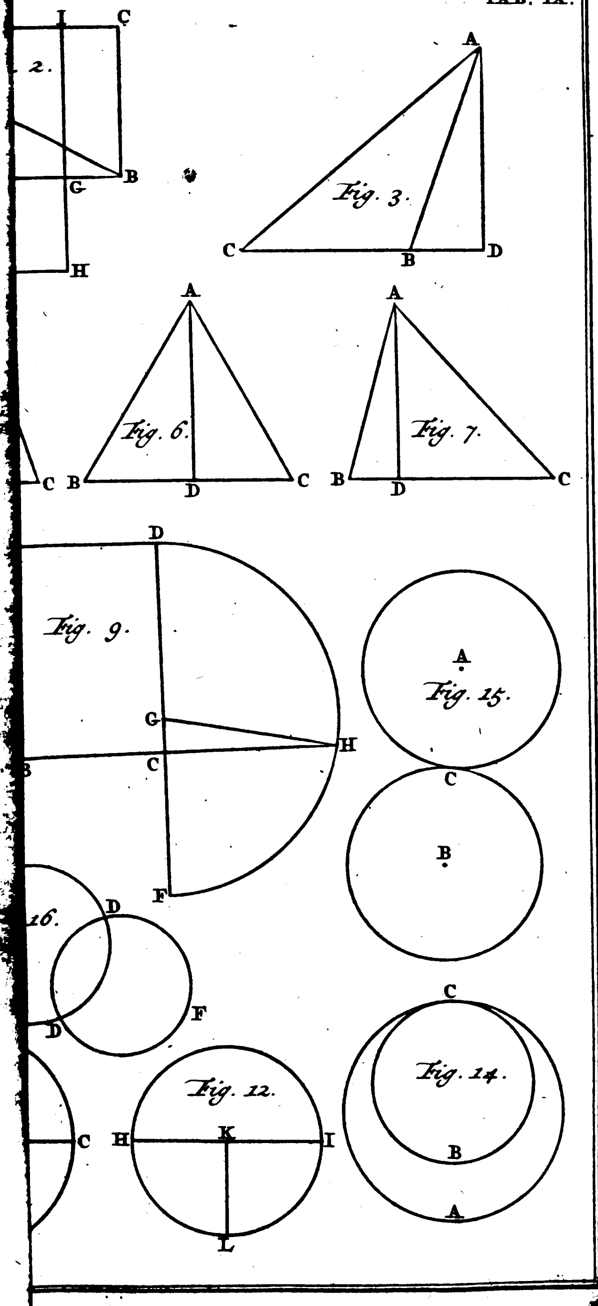
DEFINITIO. VI.

Segmenti autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEfinit jam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis conſiderantur. Primo loco angulum ſegmen-

Digitized by Google

TAB. IX.



Digitized by Google

Digitized by Google

ſegmenti, dicens angulum mixtum ABD, vel ADB, contentum ſub recta linea BD, & circumferentia BAD, appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentum circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus BAC, ſemicirculi: Si vero ſegmentum majus ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ABD, ſegmenti majoris: Si denique ſegmentum minus fuerit ſemicirculo, angulus CBD, ſegmenti minoris nuncupabitur. TAB. X. fig. 3. fig. 4. fig. 3.

DEFINITIO. VII.

In ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adjunctis illis lineis comprehenſus angulus eſt in ſegmento.

SIt ſegmentum circuli quodcunque ABC, cujus baſis recta AC. Ex ſuſcepto quolibet puncto, B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur exiſtere in ſegmento ABC. TAB. X. fig. 5.

DEFINITIO. VIII.

Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.

EX puncto A, quolibet ſuſcepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur recta duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ BCD, cujuſque, quam quidem duæ rectæ AB, TAB. X. fig. 6.

 AD,

AD, aſſumunt. Angulus itaque rectilineus BAD, inſiſtere dicitur circumferentiæ BCD.

Præter tres dictos angulos conſideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentiis ſe mutuo tangentibus, ſive hoc exterius fiat, ſive interius. Exemplum.
TAB X. fig. 7. *Si recta AB, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel BCE, dicetur angulus contingentiæ, ſive contactus: Rurſus, ſi circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curvilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaque, ut vides, tres anguli contingentiæ, unus quidem mixtus, reliqui vero duo curvilinei.*

DEFINITIO. IX.

Sector autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis aſſumpta.

TAB X. fig. 8. *SI in circulo ABCD, cujus centrum E, rectæ AE, CE, conſtituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ aſſumunt, Sector circuli.*

DEFINITIO. X.

Similia circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales; Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.

TAB. X. fig. 9. *SEgmenta videlicet ABDF, DCAE, ejuſdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF,*

Digitized by Google

ABF, DCE, æquales: vel, quod idem eſt, in quibus iidem anguli æquales exiſtunt, juxta 7. definitionem, ſimilia dicuntur, & ipſæ circumferentiæ quoque ABDF, DCAE, ſimiles.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

Dati circuli centrum reperire.

Sit circulus datus ABCD, cujus centrum oportet invenire. Ducatur in eo linea utcunque AC, *a* quæ bifariam dividatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, utrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam ſecta in F; dico F, eſſe centrum circuli propoſiti. In ipſa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipſam dividat inæqualiter, quandoquidem in F, diviſa fuit æqualiter. Si igitur F, non eſt centrum, ſit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & baſis AG, baſi CG; (à centro enim duci dicuntur) *b* erunt anguli AEG, CEG, æquales; *c* ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus, ex conſtructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales ſunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non eſt ergo punctum G, centrum; eademque eſt ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

TAB. X. fig. 10.
a 10. primi
b 8. primi
c 10. def.

COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante eſſe centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta, rectam AC, bifariam ſecat in E, & ad angulos rectos, oſtenſum fuit, punctum ejus medium F, neceſſario eſſe circuli centrum.

THEOR.

Digitized by Google

ij. **THEOR. 1. PROPOS. 2.**

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipſa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

Tab. X. fig. 11. In circulo ABC, ſumantur quælibet duo puncta A, & C, in ejus circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam, cadere intra circulum, ita ut ipſum ſecet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis eſt linea ADC, recta, ut vult adverſarius. *a 1. tertii.* Invento *a* igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta aſſumpta A, & C, nec non ad quodvis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, ſecetque ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cujus baſis ponitur recta ADC, *b 5. primi* æqualia ſunt, (è centro enim ducuntur) *b* erunt anguli EAD, ECD, æquales: Eſt autem angu- *c 16. primi* gulus EDA, *c* angulo ECD, major externus interno oppoſito, cum latus CD, in triangulo ECD, ſit productum ad A, Igitur & angulo EAD, major erit idem angulus EDA. Quare recta EA, majori angulo ADE, oppoſita, (hoc *d 19. primi* eſt, recta EB, ſibi æqualis;) *d* major erit, quam recta ED, minori angulo DAE, oppoſita, pars quam totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, ſed intra. Eodem enim modo demonſtrabitur, rectam ductam ex A, in C, non poſſe cadere ſuper arcum ABC, ita ut eadem ſit, quæ circumferentia ABC. Eſſet enim recta EA, major, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus ſit linea curva, non autem recta. Itaque, ſi in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat oſtendendum.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

Hinc eſt manifeſtum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita ut eum non ſecet, in uno tantum puncto ipſum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, *g* caderet pars rectæ inter ea duo puncta poſita, intra circulum. Quare circulum ſecaret, quod eſt contra hypotheſin. g 2. *tertii.*

THEOR. 2. PROPOS. 3.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.

PEr centrum A, circuli BCD, recta CE, extenſa dividat rectam BD, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam AF, eſſe ad angulos rectos ipſi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & baſes AB, AD, æquales. *a* Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc eſt, *d* recti. Quod erat primo propoſitum. *TAB. X. fig. 12.* a 8. *primi* d 10. *def.*

Sit jam AF ad angulos rectos ipſi BD. Dico rectam BD, bifariam ſecari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, ſint æqualia, *b* erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales ſunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: *c* erunt latera FB, FD, æqualia. Quod ſecundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat. b 5. *primi* c 26. *primi*

Digitized by Google

COROLLARIUM.

Ex hac demonſtratione facile inferemus, in quovis triangulo duorum laterum æqualium, ſive æquilaterum illud ſit, ſive Iſoſceles, lineam, quæ baſim bifariam ſecet, perpendicularem eſſe ad baſim. Et contra, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bifariam. Nam in triangulo ABD, cujus duo latera AB, AD, æqualia ſunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus deſcribi poteſt: ex eo, quod recta AF, ſecat baſin BD, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quod anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim BD, à recta AF, bifariam ſecari.

TAB. X. fig. 12.

iv. THEOR. 3. PROPOS. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, non per centrum extenſæ; ſe ſe mutuo bifariam non ſecabunt.

TAB. X. fig. 13.

DUæ rectæ AB, CD, ſe mutuo in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, ut mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim una earum per centrum tranſit, certum, eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam dividitur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamvis una earum nonnunquam bifariam ab altera dividatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diviſa enim ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E. *a* Invento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta EF. Quoniam ergo FE, ponitur ſecare rectam AB, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam dividi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 1. tertii.
b 3. tertii.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

Si duo circuli ſeſe mutuo ſecent, non erit illorum idem centrum.

DUo circuli ABD, EBD, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum utriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad ſectionem B; CA, vero ſecans utramque circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ CB, *b* æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, *a* æquales inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

TAB. X. fig. 14.
b 15. def.
a 1. pron.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vi.

Si duo circuli ſeſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DUo circuli AB, BC, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tactum B. At DC, ſecans utramque circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, *b* æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD, *a* inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. X. fig. 15.
b 15. def.
a 1. pron.

THEOR.

vij. THEOR. 6. PROPOS. 7.

Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper major eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſque partes minimæ, vel maximæ.

TAB. X. fig. 16. IN diametro AB, circuli ACDEB, cujus centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, majorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, majorem recta GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad utraſque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, *a* majora (a 20. primi) ſunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, major, quam GC. Eadem ratione major erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima eſt omnium, que ex G, in circulum cadunt.

Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF, *b* minus eſt duobus lateribus FG, GE. Eſt autem (b 20. primi) EF,

EF, ipſi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

Rurſus, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia ſunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, major eſt angulo GFD; c erit baſis GC, major baſe GD. Eadem ratione major erit GC, quam GE; Item major erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major eſt ea, quæ remotior. c 24. primi

Fiat jam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia ſunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; d erunt rectæ GE, GH, ex utraque parte ipſius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter ſe. Quod autem nulla alia his duabus poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cum ſit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, major quam GH: ſi vero cadat infra H, erit ea, cum ſit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, ut oſtenſum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad utraſque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum. d 4. primi

THEOR. 7. PROPOS. 8. viij.

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet:

vij. THEOR. 6. PROPOS. 7.

Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper major eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſque partes minimæ, vel maximæ.

TAB. X. fig. 16. IN diametro AB, circuli ACDEB, cujus centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, majorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, majorem recta GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad utraſque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igi-
a 20. primi tur duo latera GF, FC, trianguli GFC, *a* majora ſunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, major, quam GC. Eadem ratione major erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF,
b 20. primi *b* minus eſt duobus lateribus FG, GE. Eſt autem EF,

EF, ipſi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

Rurſus, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia ſunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, major eſt angulo GFD; *c* erit baſis GC, major baſe GD. Eadem ratione major erit GC, quam GE; Item major erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major eſt ea, quæ remotior. c 24. *primi*

Fiat jam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia ſunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; *d* erunt rectæ GE, GH, ex utraque parte ipſius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter ſe. Quod autem nulla alia his duabus poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cum ſit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, major quam GH: ſi vero cadat infra H, erit ea, cum ſit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, ut oſtenſum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad utraſque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum. d 4. *primi*

THEOR. 7. PROPOS. 8. viij.

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet:

libet: In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper major eſt; In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad utraſque partes minimæ, vel maximæ.

Tab. X. fig. 17. EX puncto A, extra circulum BCDEFI, cujus centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum tranſeat, aliæ vero AH, AG, AF, utcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, majorem recta AG, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione AG, majorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ AB, minorem eſſe recta AD, remotiore; Et eadem ratione, ipſam AD, minorem quam AE. Denique ex A, ad utraſque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera *a 20. primi* AK, KH, trianguli AKH, *a* majora ſunt recta AH; Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc eſt, toti rectæ AI; erit & AI, major, quam AH. Eadem ratione erit AI, major, quam AG, & quam AF. Quare AI, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

Deinde,

Deinde, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia ſunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, major eſt angulo AKG; *b* erit baſis AH, baſe AG, major. Eadem ratione major erit AH, quam AF: Item AG, major, quam AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major eſt linea remotiore. b 24. primi

Rurſus, quia in triangulo ACK, recta AK, *c* minor eſt duabus AC, CK; ſi auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt. c 20. primi

Rurſus, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; *d* erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE, item AD, minor quam AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor eſt, quam remotior ab eadem. d 21. primi

Poſtremo fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia ſunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC, AL, ex utraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter ſe æquales. Quod autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens ultra L, erit ipſa, cum ſit remotior à minima major quam AL. Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cum ſit minimæ propinquior, minor, quam AL, ut oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad utraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum. e 4. primi

H THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 8. PROPOS. 9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

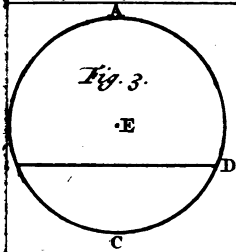
TAB. X. fig. 18. A puncto aſſumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter ſe æquales. Dico A, punctum eſſe centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus diviſis bifariam in E, & F, *b* ducantur ex A, rectæ AE, AF. (b 10. primi) Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & baſes AB, AC, ponuntur etiam æquales; *a* erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque (a 8. primi) recti. Eodem modo oſtendemus, angulos ad F, eſſe rectos. Quare cum rectæ AE, AF, dividant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, tranſibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propoſ. 1. hujus lib. Punctum igitur A, in quo ſe mutuo ſecant, centrum erit circuli. Si enim eſſet aliud punctum centrum, non tranſiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.

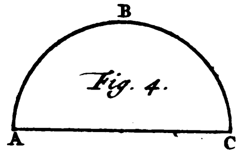
TAB. XI. fig. 1. Aliter. Si punctum A, non eſt centrum circuli, *b* ſit centrum inventum E, ex quo per (b 1. tertii.) A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum eſt punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; *c* erit recta AD, quæ propinquior eſt (c 7. tertii.) rectæ AG, per centrum E, ductæ major, quam recta AC, remotior ab AG, quod eſt abſurdum. Poſitæ ſunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem abſurdum ſequetur, ſi aliud punctum præter, A, centrum ponatur.

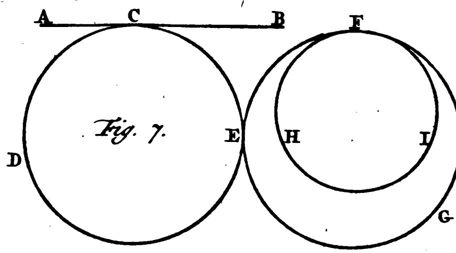
Quod ſi quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum una trium æqualium

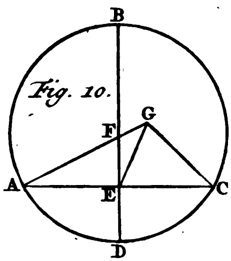
Digitized by Google

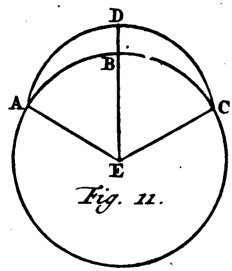
TAB. X.

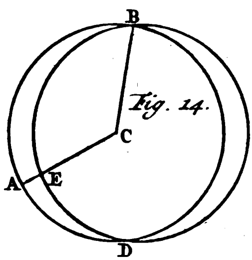


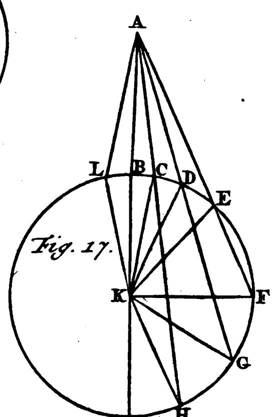


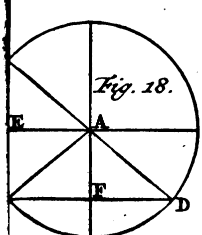












Digitized by Google

libet: In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper major eſt; In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad utraſque partes minimæ, vel maximæ.

TAB. X. fig. 17. EX puncto A, extra circulum BCDEFI, cujus centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum tranſeat, aliæ vero AH, AG, AF, utcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, majorem recta AG, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione AG, majorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ AB, minorem eſſe recta AD, remotiore; Et eadem ratione, ipſam AD, minorem quam AE. Denique ex A, ad utraſque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci poſſe tantummodo duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera *a 20. primi* AK, KH, trianguli AKH, *a* majora ſunt recta AH; Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc eſt, toti rectæ AI; erit & AI, major, quam AH. Eadem ratione erit AI, major, quam AG, & quam AF. Quare AI, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

Deinde,

Deinde, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia ſunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, major eſt angulo AKG; *b* erit baſis AH, baſe AG, major. Eadem ratione major erit AH, quam AF: Item AG, major, quam AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major eſt linea remotiore. b 24. primi

Rurſus, quia in triangulo ACK, recta AK, *c* minor eſt duabus AC, CK; ſi auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt. c 20. primi

Rurſus, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; *d* erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE, item AD, minor quam AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor eſt, quam remotior ab eadem. d 21. primi

Poſtremo fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia ſunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC, AL, ex utraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter ſe æquales. Quod autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens ultra L, erit ipſa, cum ſit remotior à minima major quam AL. Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cum ſit minimæ propinquior, minor, quam AL, ut oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolum rectæ lineæ æquales ad utraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum. e 4. primi

THEOR. 8. PROPOS. 9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

TAB. X. fig. 18. A puncto aſſumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter ſe æquales. Dico A, punctum eſſe centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus diviſis bifariam in E, & F, *b* ducantur ex A, rectæ AE, AF. (b 10. primi) Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & baſes AB, AC, ponuntur etiam æquales; *a* erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. (a 8. primi) Eodem modo oſtendemus, angulos ad F, eſſe rectos. Quare cum rectæ AE, AF, dividant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, tranſibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propoſ. 1. hujus lib. Punctum igitur A, in quo ſe mutuo ſecant, centrum erit circuli. Si enim eſſet aliud punctum centrum, non tranſiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. XI. fig. 1. Aliter. Si punctum A, non eſt centrum circuli, *b* ſit centrum inventum E, ex quo per A, agatur diameter FG. (b 1. tertii.) Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum eſt punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; *c* erit recta AD, quæ propinquior eſt rectæ AG, per centrum E, ductæ major, quam recta AC, remotior ab AG, quod eſt abſurdum. (c 7. tertii.) Poſitæ ſunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem abſurdum ſequetur, ſi aliud punctum præter, A, centrum ponatur.

Quod ſi quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum una trium æqualium

TAB. X.

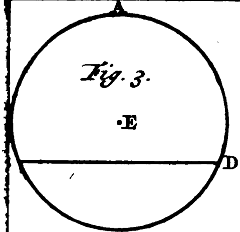


Fig. 3.

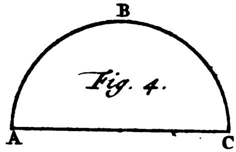


Fig. 4.

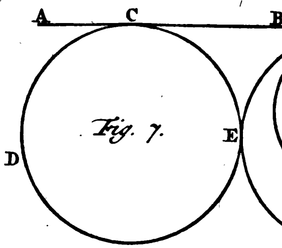
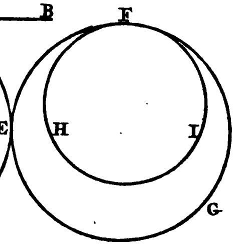


Fig. 7.



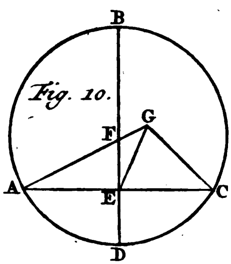


Fig. 10.

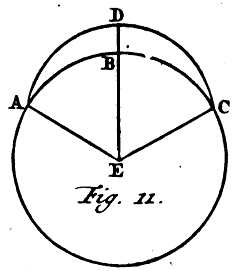


Fig. 11.

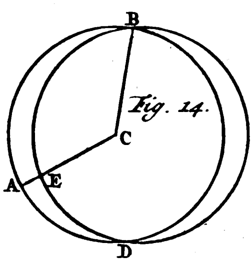


Fig. 14.

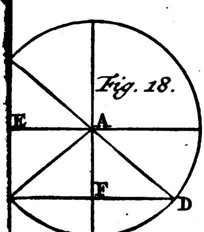


Fig. 18.

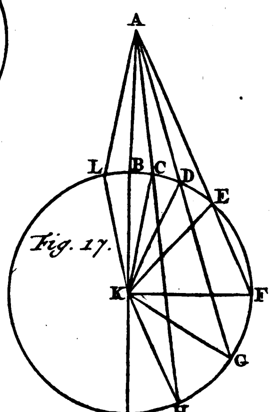


Fig. 17.

Digitized by Google

Digitized by Google

lium datarum, ut ſi dicantur æquales tres AB, AF, AC, ubi EA, coincidit cum AF; *d* erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC, quod eſt abſurdum. Ponitur enim utrique æqualis. d 7. tertii

THEOR. 9. PROPOS. 10.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non ſecat.

SEcet enim, ſi fieri poteſt, circulus ABCDEF, circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ jungantur rectis AB, BD: quibus *a* bifariam diviſis in I, & K, *b* educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, ſecant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; tranſibit utraque, ex corollario propoſ. 1. hujus lib. per centrum ipſius. Quare punctum L, in quo ſe dividunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonſtrabimus, punctum L, eſſe centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli ſe mutuo ſecantes idem poſſident centrum, *c* quod eſt abſurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non ſecat. Quod erat demonſtrandum. *TAB. XI. fig. 2.* a 10. *primi* b 11. *primi* c 5. *tertii*

Aliter. Secent ſe iidem duo circuli, ſi fieri poteſt, in tribus punctis A, B, & D. *d* Inventum autem ſit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter ſe. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, aſſumptum eſt punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ rectæ æquales, *e* erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli ſe mutuo ſecantes habent idem centrum. *f* Quod eſt abſurdum. *TAB. XI. fig. 3.* d 1. *tertii* e 9. *tertii* f 5. *tertii*

 THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 10. PROPOS. 11.

Si duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TAB. XI. fig. 4. TAngat circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & ſit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod neceſſario ab illo diverſum erit, cum duo circuli interius ſe tangentes, *a* non poſſint idem centrum habere. Dico rectam extenſam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit ſecet utrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, *b* majora ſunt latere GA; Eſt autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, poſitum ſit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ majores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, major, quam FD. Quare cum FA, æqualis ſit ipſi FB; (quod F, poſitum fuerit centrum circuli ABC,) erit & FB, major, quam FD, pars quam totum, quod eſt abſurdum.

a 6. tertii.

b 20. primi

Quod ſi quis velit contendere F, eſſe centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, inſtituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, *c* majora ſunt latere FA: Eſt autem recta FA, rectæ FE, æqualis, (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, majores ſunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, major, quam GE. Quia igitur GA, æqualis eſt ipſi GC: (propterea quod G, ponitur eſſe centrum circuli ABC,) erit quoque GC, major, quam GE, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrum majoris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG,

c 20. primi

Digitized by Google

FG, extenſa utrumque circulum ſecabit, ſed in contactum A, cadet. Quare ſi duo circuli ſeſe intus contingant, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 12. [xij]

Si duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum tranſibit.

Circuli duo ABC, DBE, tangant ſe exterius in B, & centrum circuli ABC, ſit F, circuli vero DBE, centrum ſit G. Dico rectam extenſam per F, & G, tranſire per contactum B. Si enim non tranſit, ſecet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, *a* majora ſunt latere FG: Eſt autem recta BF, rectæ FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE,) erunt & rectæ FC, GE, majores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant, &c. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XI. fig. 5.

a 20. *primi*

THEOR. 12. PROPOS. 13. xiij.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, ſive intus, ſive extra tangat.

Tangant ſeſe circuli ABCD, AECF, intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis, quam uno, A, & C: Aſſumantur autem centra horum circulorum G, H, *a* quæ diverſa erunt, per quæ recta GH, in utramque partem extendatur, quam

TAB. XII. fig. 6.

a 6. *tertii*

 neceſſe

Digitized by Google

b 11. tertii. neceſſe eſt *b* cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, ſit centrum, & recta AGHC, diameter, dividetur AGHC, bifariam in puncto G. Simili ratione dividetur eadem AC, bifariam in H, quod eſt abſurdum. Una enim recta in uno duntaxat puncto dividitur bifariam. Si namque GC, eſt dimidium totius AC, erit neceſſario HC, dimidio minor, cum ſit pars dimidii GC.

TAB. XI. fig. 7. Quod ſi quis dicat rectam GH, extenſam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertingere ad contactum C, ſed ſecare utrumque circulum in I, & K, ut in 7ma figura perſpicuum eſt: (Dicere enim quis poſſet, in præcedenti propoſ. oſtenſum eſſe, rectam per duo centra circulorum ſeſe intus tangentium ductam cadere in unum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo recte affirmare poterit, cum demonſtratio præcedentis propoſ. utrique contactui conveniat. Sed quicquid dicat aliquis, oſtendemus, abſurdum illud eſſe:) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ GC, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli ABCD: & H, centrum circuli AECF. Et quia in triangulo GHC,

c 20. primi duo latera GH, HC, *c* majora ſunt latere GC: Sunt autem rectæ GH, HC, æquales ipſi GK: (quod HC, HK, ex centro H, ſint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ GI; (quod ſint ex G, centro,) erit quoque recta GK, major quam GI, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Ponatur ſecundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoni-

d 20. primi am igitur rectæ HG, GC, *d* majores ſunt recta HC; Eſt autem HC, æqualis rectæ HA: (cum utraque ducta ſit ex centro H,) erunt quoque HG, GC, majores recta HA. Quare dempta communi HG, erit GC, major, quam GA, quod eſt abſurdum, cum utraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus ſe tangent in pluribus punctis, quam uno.

TAB. XI. fig. 8. Tangant ſe jam circuli AB, CB, exterius in pluribus

pluribus punctis, quam uno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli GB, recta DE, *e* quæ per contactum F, neceſſario tranſibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, ſe tangunt, tangant ſeſe in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc eſt ipſi DE: *f* Sunt autem & majores, quod eſt abſurdum. Non ergo ſe tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno. e 12. tertii f 20. primi

Aliter. Si circuli AB, CB, exterius ſe tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipſa intra unum circulorum, per 2. propoſ. hujus tertii lib. & ideo extra alium, quod eſt contra eandem propoſ. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 13. PROPOS. 14. xiv.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

SInt in circulo ABCD, cujus centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipſas æqualiter diſtare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & conjungantur rectæ EA, ED. *a* Secabunt rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter ſe ſunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, *b* æquale eſt quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt. Diſtant igitur TAB. XI. fig. 9. a 3. tertii b 47. primi

per 4. defin. hujus lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

Rurſus diſtent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. hujus lib. æquales erunt; *c* dividentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem quadratum rectæ EA, *d* æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia ſunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro &c. Quod erat demonſtrandum.

c 3. tertii.
d 47. primi

XV. THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper major.

TAB. XI. fig. 10.

In circulo ABCDEF, cujus centrum G, diameter ſit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium eſſe maximam AF, & HI, majorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior eſt CD, à centro, quam HI, erit GK, major quam GL, per 4. defin. hujus lib. Abſcindatur ex GK, recta GM, ipſi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales ſunt, æqualiter diſtabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. hujus lib. *a* & ideo inter ſe æquales erunt. Rurſus quia rectæ GB, GE, *b* majores quidem ſunt

a 14. tertii.
b 20. primi

ſunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, major, quam BE. Eadem ratione oſtendetur AF, major omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia ſunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, major eſt angulo CGD; *c* erit recta BE, major quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi BE, major quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum. c 24. *primi*

THEOR. 15. PROPOS. 16. XVI.

Quæ ab extremitate diametri cujuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: & ſemicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major eſt; reliquus autem minor.

In circulo ABC, cujus centrum D, diameter ſit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum, qualis eſt AB; ducta DB, *a* erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, ſed DAB, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli in triangulo *b* minores ſunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum: neque eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra, qualis eſt EF. Dico jam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, ſecans circumferentiam in I, quæ neceſſario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. *TAB. XI. fig.* 11. a 5. *primi* b 17. *primi*

Digitized by Google

per 4. defin. hujus lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

Rurſus diſtent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. hujus lib. æquales erunt; *c* dividentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem quadratum rectæ EA, *d* æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia ſunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro &c. Quod erat demonſtrandum.

c 3. *tertii.*
d 47. *primi*

XV. THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper major.

TAB. XI. fig. 10.

IN circulo ABCDEF, cujus centrum G, diameter ſit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium eſſe maximam AF, & HI, majorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior eſt CD, à centro, quam HI, erit GK, major quam GL, per 4. defin. hujus lib. Abſcindatur ex GK, recta GM, ipſi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales ſunt, æqualiter diſtabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. hujus lib. *a* & ideo inter ſe æquales erunt. Ruſus quia rectæ GB, GE, *b* majores quidem ſunt

a 14. *tertii.*
b 20. *primi*

ſunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, major, quam BE. Eadem ratione oſtendetur AF, major omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia ſunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, major eſt angulo CGD; *c* erit recta BE, major quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi BE, major quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum. c 24. *primi*

THEOR. 15. PROPOS. 16. xvi.

Quæ ab extremitate diametri cujuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: & ſemicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major eſt; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cujus centrum D, diameter ſit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum, qualis eſt AB; ducta DB, *a* erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, ſed DAB, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli in triangulo *b* minores ſunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum: neque eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra, qualis eſt EF. Dico jam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, ſecans circumferentiam in I, quæ neceſſario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. *TAB. XI. fig.* 11. a 5. *primi* b 17. *primi*

Digitized by Google

per 4. defin. hujus lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

Rurſus diſtent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. hujus
c 3. tertii. lib. æquales erunt; c dividentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem quadratum
d 47. primi rectæ EA, d æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia ſunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro &c. Quod erat demonſtrandum.

XV. THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper major.

TAB. XI. fig. 10. IN circulo ABCDEF, cujus centrum G, diameter ſit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium eſſe maximam AF, & HI, majorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior eſt CD, à centro, quam HI, erit GK, major quam GL, per 4. defin. hujus lib. Abſcindatur ex GK, recta GM, ipſi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales ſunt, æqualiter diſtabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4.
a 14. tertii. defin. hujus lib. a & ideo inter ſe æquales erunt.
b 20. primi Rurſus quia rectæ GB, GE, b majores quidem ſunt

Digitized by Google

ſunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, major, quam BE. Eadem ratione oſtendetur AF, major omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia ſunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, major eſt angulo CGD; *c* erit recta BE, major quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi BE, major quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum. c 24. *primi*

THEOR. 15. PROPOS. 16. xvi.

Quæ ab extremitate diametri cujuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: & ſemicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major eſt; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cujus centrum D, diameter ſit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum, qualis eſt AB; ducta DB, *a* erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, ſed DAB, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli in triangulo *b* minores ſunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum: neque eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra, qualis eſt EF. Dico jam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, ſecans circumferentiam in I, quæ neceſſario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. *TAB. XI. fig.* 11. a 5. *primi* b 17. *primi*

c 17. primi Quoniam igitur in triangulo DAH, c duo anguli DHA, DAH, minores ſunt duobus rectis; & DHA, rectus eſt, per conſtructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc
d 19. primi eſt, recta illi æqualis DI, d major erit, quam DH, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: ſed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea ſecabit circulum. Dico denique angulum ſemicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, majorem eſſe omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim oſtenſum eſt, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet neceſſario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo ſemicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum majorem angulo contingentiæ, cum ille ſit pars anguli ſemicirculi, hic vero totum quodpiam reſpectu anguli contingentiæ. Id quod liquido conſtat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, ut demonſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille hujus ſit pars: Angulus vero contingentiæ contentus ſub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille hujus pars ſit. Eademque ratio eſt de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, ſub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, ut demonſtravimus. Angulus igitur ſemicirculi major eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cujuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt, ipſam cadere extra circulum. Quare ſolum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

Quare ſi jubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, ut demonſtratum eſt. *TAB. XI. fig. 12.*

PROBL. 2. PROPOS. 17. xvii.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum BC, cujus centrum D. Ducatur recta AD, ſecans circulum BC, in B. Deinde centro D, intervallo autem DA, deſcribatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, ſecans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, ſecante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia ſint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, utrumque utrique, ut conſtat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus ſit communis: Erunt *a* & baſes BE, CA, & anguli DBE, DCA, ſuper ipſas, æquales. Eſt autem DBE, rectus ex conſtructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat. *TAB. XI. fig. 13.* *a 4. primi*

THEOR.

xviij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adjungatur recta quædem linea; quæ adjuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

TAB. XI. fig. 14. RE cta linea AB, tangat in C, circulum CD, cujus centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem eſſe ad AB. Si enim non eſt, ducatur EF, perpendicularis ad AB, ſecans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, *a* duo anguli ECF, EFC, minores ſunt duobus rectis; Et eſt EFC, rectus, ex conſtructione: erit ECF, minor. Quare *b* major erit recta EC, hoc eſt, ED, quam EF, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare ſi circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 17. primi
b 19. primi

Aliter. Si EC, non eſt perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtuſus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum major ſit angulo ſemicirculi ECD, erit angulus ſemicirculi minor angulo aliquo acuto: quod eſt abſurdum. Omnis ſiquidem angulus ſemicirculi *c* major eſt omni acuto.

c 16. tertii.

xviiij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAB. XI. fig. 15. TAngat recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, eſſe centrum circuli. Si enim eſt extra

extra CE, ſit F, centrum; à quo ad C, ducatur recta FC, quæ *a* perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli exiſtet. Itaque ſi circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonſtrandum. a 18. tertii

THEOR. 18. PROPOS. 20. xx.

In circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

IN circulo ABC, cujus centrum D, ſuper baſin BC, conſtituatur angulus BDC, ad centrum; & ſuper eandem baſin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum eſſe anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, *a* erunt anguli DAB, DBA, æquales: Eſt autem externus angulus BDE, *b* æqualis duobus angulis internis DAB, DBA: Quare BDE, duplus erit alterius eorum, ut anguli DAB. Eodem modo duplus oſtendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum ſunt duplæ, ſingulæ ſingularum, eſt quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Conſtat ergo propoſitum. *TAB. XI. fig. 16.* a 5. primi b 32. primi

Deinde non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, ſed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC. *c* æqualis eſt duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo *d* inter ſe ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum. *TAB. XI. fig. 17.* c 32. primi d 5. primi

Tertio recta AB, ſecet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur *TAB. XII. fig. 1.*

igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem baſin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, ut oſtenſum eſt in ſecunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC,
e 20. prim. duplus erit reliqui anguli BAC *e*. Quando enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, ſunt inter ſe æquales.

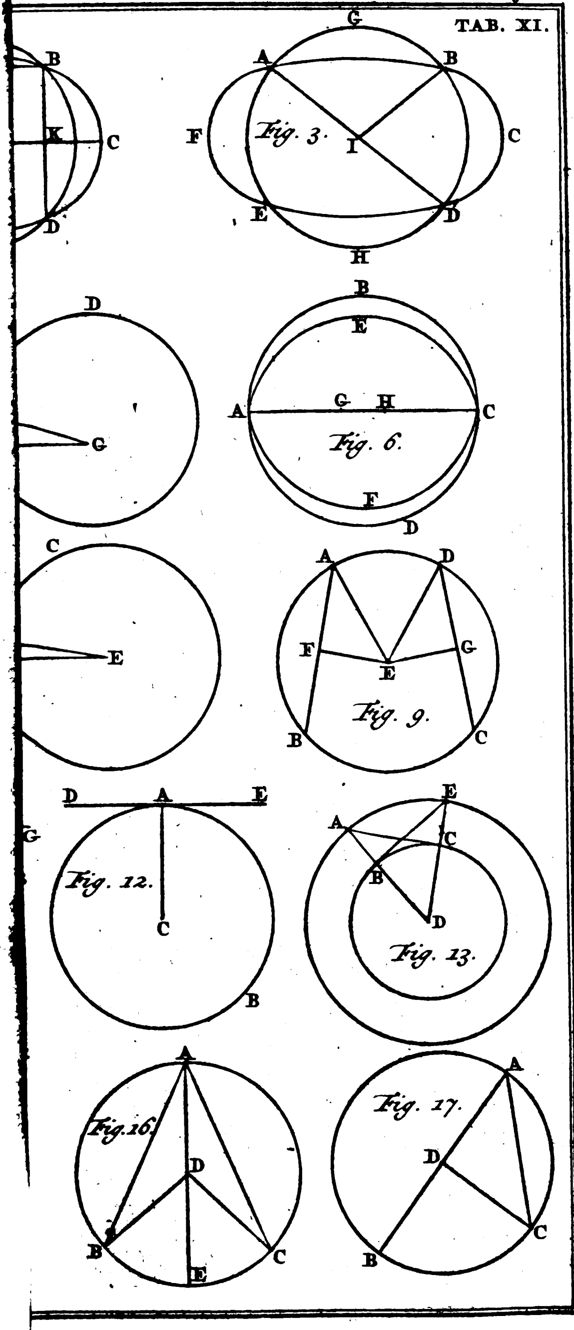
TAB. XII. fig. 2. IN circulo ABCD, cujus centrum E, exiſtant anguli A, & B, in ſegmento DABC. Dico eos eſſe æquales. Sit enim ſegmentum DABC, primum ſemicirculo majus; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur an-
a 20. tertii. gulus DEC, ad centrum, *a* duplus eſt tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem baſin DC; erunt anguli
b 7. prim. A, & B, dimidiatæ partes anguli E. *b* Quare inter ſe æquales erunt. Eademque ratione omnes alii anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendentur eſſe æquales.

TAB. XII. fig. 3, 4. Sit deinde ſegmentum DABC, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in ſegmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur
c 20. tertii. angulus DEF, ad centrum, *c* duplus eſt anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli ſimul DEF, CEF, duorum angulorum ſimul DAF, CAF, dupli erunt, hoc eſt, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo

DEF:

Digitized by Google

TAB. XI.



xviij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adjungatur recta quædem linea; quæ adjuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

TAB. XI. fig. 14. Recta linea AB, tangat in C, circulum CD, cujus centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem eſſe ad AB. Si enim non eſt, ducatur EF, perpendicularis ad AB, ſecans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, *a* duo anguli ECF, EFC, minores ſunt duobus rectis; Et eſt EFC, rectus, ex conſtructione: erit ECF, minor. Quare *b* major erit recta EC, hoc eſt, ED, quam EF, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare ſi circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 17. primi

b 19. primi

Aliter. Si EC, non eſt perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtuſus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum major ſit angulo ſemicirculi ECD, erit angulus ſemicirculi minor angulo aliquo acuto: quod eſt abſurdum. Omnis ſiquidem angulus ſemicirculi *c* major eſt omni acuto.

c 16. tertii.

xviiij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAB. XI. fig. 15. Tangat recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, eſſe centrum circuli. Si enim eſt extra

extra CE, ſit F, centrum; à quo ad C, ducatur recta FC, quæ *a* perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli exiſtet. Itaque ſi circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonſtrandum. a 18. tertii.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xx.

In circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

IN circulo ABC, cujus centrum D, ſuper baſin BC, conſtituatur angulus BDC, ad centrum; & ſuper eandem baſin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum eſſe anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, *a* erunt anguli DAB, DBA, æquales: Eſt autem externus angulus BDE, *b* æqualis duobus angulis internis DAB, DBA: Quare BDE, duplus erit alterius eorum, ut anguli DAB. Eodem modo duplus oſtendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum ſunt duplæ, ſingulæ ſingularum, eſt quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Conſtat ergo propoſitum. TAB. XI. fig. 16. a 5. primi b 32. primi

Deinde non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, ſed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC. *c* æqualis eſt duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo *d* inter ſe ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum. TAB. XI. fig. 17. c 32. primi d 5. primi

Tertio recta AB, ſecet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur TAB. XII. fig. 1.

Digitized by Google

igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem baſin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, ut oſtenſum eſt in ſecunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC,
e 20. primi. duplus erit reliqui anguli BAC e. Quando enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

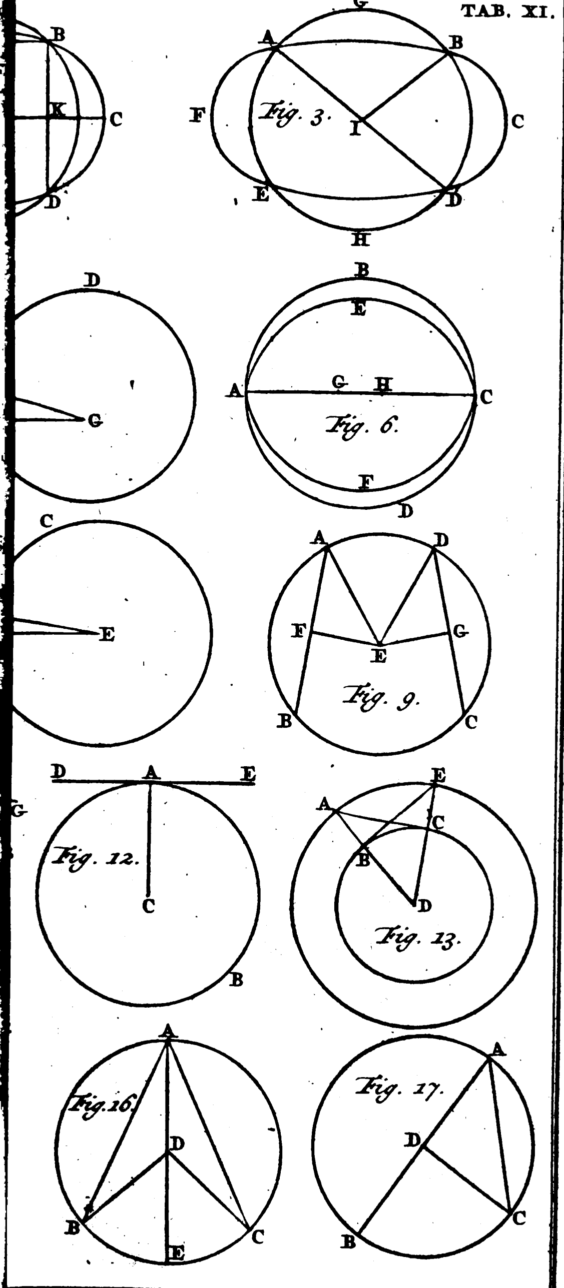
xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, ſunt inter ſe æquales.

TAB. XII. fig. 2. IN circulo ABCD, cujus centrum E, exiſtant anguli A, & B, in ſegmento DABC. Dico eos eſſe æquales. Sit enim ſegmentum DABC, primum ſemicirculo majus; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur an-
a 20. tertii. gulus DEC, ad centrum, a duplus eſt tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem baſin DC; erunt anguli
b 7. pron. A, & B, dimidiatæ partes anguli E. b Quare inter ſe æquales erunt. Eademque ratione omnes alii anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendentur eſſe æquales.

TAB. XII. fig. 3, 4. Sit deinde ſegmentum DABC, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in ſegmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur
c 20. tertii. angulus DEF, ad centrum, c duplus eſt anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli ſimul DEF, CEF, duorum angulorum ſimul DAF, CAF, dupli erunt, hoc eſt, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF:

TAB. XI.



B
K
C
D
G
A
B
F
Fig. 3.
I
C
E
D
H
D
G
B
E
A
G
H
C
Fig. 6.
F
D
C
E
A
D
F
E
G
Fig. 9.
B
C
D
A
E
G
Fig. 12.
C
B
E
A
C
B
D
Fig. 13.
A
Fig. 16.
D
B
E
C
A
Fig. 17.
D
C
B

Digitized by Google

DEF: erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, ſimul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli DBC. *d* Quare æquales erunt anguli DAC, DBC. d 7. prim.

Aliter. Secent ſeſe rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales ſunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi *f* æquales ſunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, *g* qui æquales ſunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales ſunt oſtenſi in ſegmento majori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales ſunt. *TAB. XII. fig. 5, 6.* f 32. prim. g 15. prim.

Aliter. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quodvis F, includentibus centrum E, ita ut tam DABCF, quam FDABC, ſit ſegmentum majus; jungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem ſegmento majori DABCF, æquales ſunt; nec non & anguli FAC, FBC, in ſegmento etiam majori FDABC, exiſtentes; ſi hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, &c. Quod erat oſtendendum. *TAB. XII. fig. 7, 8.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxii.

Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli, qui ex adverſo, duobus rectis ſunt æquales.

IN circulo, cujus centrum E, inſcriptum ſit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales eſſe duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, *a* erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem ſegmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem ſegmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc eſt, totus angulus ABC, *TAB. XII. fig. 9, 10.* a 21. tertii.

ABC, æqualis eſt duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, b 32. primi CAD, CDA. *b* Sed hi tres æquales ſunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis æquales. Nam rurſus duo anguli ABD, ACD, ſunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, c 32. primi æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. *c* Sed hi tres ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterornm igitur in circulis deſcriptorum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIUM.

Anguli inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus ſive ad centra, ſive ad circumferentias, ſunt inter ſe æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles ſunt.

TAB. XII. fig. 11. *Sint in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum arcus ſimiles BCD, FGH, quibus ad centra inſiſtant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter ſe æquales eſſe. Conſtituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. ſegmentorum ſimilium,* k 22. tertii *æquales erunt.* k *Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui* l 20. tertii *A, E, æquales. Quorum* l *cum dupli ſunt anguli I,* m 6. pron. *K,* m *erunt hi quoque æquales. Quod eſt propoſitum.*

Deinde ſint tam anguli I, K, quam A, E, inſiſtentes arcubus BCD, FGH, inter ſe æquales. Dico arcus BCD, FGH, eſſe ſimiles. Nam ſi A, & E,

ſint

ſint æquales: ſint n *autem tam duo anguli A, G, quam duo E, G, duobus rectis. æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. ſimilium ſegmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles. Si vero anguli I, K, ad centra ſint æquales,* o *erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc eſt, anguli A, E. Quare ut prius, arcus BCD, FGH, ſimiles ſunt. Quod erat oſtendendum.* n 22. *tertii.* o 7. *pron.*

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiij.

Super eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.

SI enim fieri poteſt, ſuper recta AB, conſtituantur ad eaſdem partes duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia ACB, ADB. Perſpicuum eſt autem, quod ſe ſolum interſecent in punctis A, & B; a Circulus enim circulum non ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Unde peripheria unius ſegmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur ſegmenta ponuntur ſimilia, erit per 10. defin. hujus lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: b quod eſt abſurdum. Non igitur ſegmenta ſunt ſimilia: Quare ſuper eadem recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum. *TAB. XII. fig.* 12. a 10. *tertii.* b 16. *primi.*

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiv.

Super æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

SUper rectis lineis æqualibus AB, CD, conſtituta ſint ſegmenta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Lineæ enim AB, CD, *TAB. XII. fig.* 13.

cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmentum AEB, ſegmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra cadat, aut intra, conſtituentur ſuper eadem recta CD, duo ſegmenta AEB, AFB, ſimilia, & inæqualia, quorum unum totum extra aliud cadit, quod eſt
a 23. tertii. abſurdum. *a* Demonſtratum enim eſt contrarium. Quod ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabunt ſeſe in pluribus punctis, quam duobus nimirum in A, B, G. Quod eſt abſurdum.
b 10. tertii. *b* Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur ſegmentum AEB, ſegmento CFD, atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

XXV. PROBL. 3. PROPOS. 25.

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cujus eſt ſegmentum.

TAB. XII. fig. 14. Sit ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel major eſt angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum major, (quod quidem continget, quando ſegmentum ABC, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia BD, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1. hujus lib. quod eſt extra ſegmentum, cum ponatur eſſe minus; erit DA, major, quam DB, cum
a 7. tertii. DB, perficiens diametrum *a* ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt.
b 18. primi Quare angulus DBA, *b* major erit angulo DAB) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cujus ſegmentum ABC.

Digitized by Google

ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. *c* Quare baſes EA, EC, æquales erunt; *d* Eſt autem & EA, æqualis ipſi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales ſint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, *e* ac propterea E, centrum erit circuli ABC, quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam. c *4. primi* d *6. primi* e *9. tertii.*

Sit deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando ſegmentum ABC, ſemicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare *f* & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) *g* Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipſi DA, quod recta AC, ſecta ſit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam, *h* erit D, centrum. *TAB. XII. fig. 15.* f *5. primi* g *6. primi* h *9. tertii.*

Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidem eveniet, ſi ſegmentum ABC, ſemicirculo majus exſtiterit. Tunc enim, quoniam BD, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1. hujus lib. quod quidem intra ſegmentum, cum majus eſſe ponatur, exiſtit; *i* erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; major igitur erit quam DA, *k* ideoque angulus DAB, major angulo DBA,) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, in E, puncto, quod oſtendetur eſſe centrum eodem modo, quo id ipſum oſtendimus, quando angulus DBA, major erat angulo DAB, ut conſtat, ſi recta ducatur EC. Circuli igitur ſegmento dato, deſcripſimus circulum, cujus eſt ſegmentum. Quod facere oportebat. *TAB. XII. fig. 16.* i *7. tertii.* k *18. primi*

xxvi. THEOR. 23. PROPOS. 26.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant.

TAB. XII. fig. 17. IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, conſtituti ſint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus inſiſtunt, ſive ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur a 20. tertii. *a* anguli B, & E, dimidii ſunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipſi æquales inter ſe. Quare ex definitione ſegmenta ABC, DEF, ſimilia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypo- b 4. primi theſi; *b* erunt baſes AC, DF, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ſint c 24. tertii. ſuper lineas æquales AC, DF, *c* erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi à circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, inter ſe æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod eſt propoſitum.

Sint deinde ad peripherias conſtituti duo anguli æquales B, & E; Dico rurſus, peripherias AC, DF, ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Erunt enim, ut prius, ſegmenta ABC, DEF, ſimilia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas AC, DF: d 20. tertii. (cum enim anguli G, H, æquales ſint, *d* quod ſint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, e 24. tertii. ut prius rectæ AC, DF, æquales) *e* erunt ipſa inter ſe æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvii.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſive ad centra, ſive ad peripherías conſtituti inſiſtant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, inſiſtant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit angulus G, major, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. *a* Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter ſe æquales, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales. TAB. XIII. fig. 1. a 26. tertii.

Inſiſtant deinde eiſdem peripheriis æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias: quos rurſus dico æquales eſſe. Nam ſi alter, ut ABC, major eſt; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, *b* eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. Quod demonſtrandum erat. b 26. tertii.

SCHOLIUM.

Si vero peripheriæ fuerint inæquales, inſiſtet majori major angulus, ſive ad centrum, ſive ad circumferentiam, quam minori. Sit peripheria AC, major, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, majorem eſſe angulo DHF, & angulum ABC, majorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, TAB. XIII. fig. 2.

 ducan-

ducanturque rectæ IG, IB, erunt ut oſtenſum eſt tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit major.

Linea recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicujus ducitur tangens circulum, parallela eſt recta lineæ, quæ peripheriam illam ſubtendit.

TAB. XIII fig. 3. *In circulo ABC, cujus centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam eſſe rectæ BC, arcum BAC, ſubtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, ſecante rectam*
h 27. tertii. *BC, in G, connexiſque rectis DB, DC, h erunt anguli ADB, ADC, circumferentiis æqualibus AB, AC, inſiſtentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG,*
i 4. primi *trianguli CDG, æqualia, utrumque utrique. i Igitur & anguli ad G, æquales ſunt ſuper baſes GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti ſunt: Sunt autem & anguli*
k 13. primi *GAE, GAF, recti. k quod DA, perpendicularis ſit*
l 28. primi *ad EF. l Ergo EF, BC, parallelæ ſunt. Quod eſt propoſitum.*

Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtuſus arcui quadrante majori. Et contra, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante majori, obtuſus.

TAB. XIII fig. 4. *Rectus angulus ABC, inſiſtat arcui AC, in centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrantem eſſe, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non*
m 15. primi *& angulus DBE, rectus; m cum æqualis ſit recto angulo*

angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales ſunt, utpote recti: ac propterea n *arcus AC, CD, DE, EA, quibus inſiſtunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans eſt. Et quoniam recta cum AB, in B, conſtituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtuſum, cadit in arcum CD; liquido conſtat, angulum acutum inſiſtere arcui quadrante minori, obtuſum vero majori.* n 26. tertij.

Sed inſiſtat jam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, eſſe rectum, &c. Productis enim rurſus rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD, & AED, ſemicirculus eſt, eſtque AC, quadrans; erit tam AE, quam CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in ſemicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, o *ac proinde anguli ad centrum B, illis inſiſtentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens majorem arcum quadrante AC, conſtituit in centro B, angulum recto angulo ABC, majorem; perſpicuum eſt, angulum minori arcui quadrante inſiſtentem, eſſe acutum; majori vero, obtuſum. Quod eſt propoſitum.* o 27. tertij.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxviij.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, majorem quidem majori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, ſint rectæ æquales AC, DF. *TAB. XIII. fig. 5.* Dico majorem peripheriam ABC, æqualem eſſe majori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt

latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem
a 8. primi & baſes AC, DF, æquales. Igitur *a* anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ
b 26. tertii. AC, DF, quibus inſiſtunt, *b* æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Quod ſi fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet major linea, majorem peripheriam, quam minor, ſi loquamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo. Nam ſi de ſegmentis circuli majoribus ſermo habeatur, major linea auferet minorem
TAB. XIII. fig. 6. *peripheriam, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, ſit recta AC, major, quam DF. Dico peripheriam AC, ſemicirculo minorem, majorem eſſe peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem baſis*
c 25. primi *AC, major baſe DF. Igitur* c *angulus AGC, major erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo*
d 26. tertii. *DHF, æqualis; eritque propterea* d *peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, major, quam peripheria DF: Ideoque reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.*

xxix. THEOR. 26. PROPOS. 29.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

TAB. XIII. fig. 5. IN circulis eiſdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas ſubtendunt, eſſe æquales.

æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, *a* æquales, quod æqualibus peripheriis AC, DF, inſiſtant. Igitur *b* baſes AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat oſtendendum. a 27. *tertii.* b 4. *primi*

SCHOLIUM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, ſubtendet majorem major linea, quam minorem, ſi de ſegmentis ſemicirculo minoribus fiat ſermo. Nam ſi de ſegmentis majoribus ſemicirculo loquamur, ſubtendet majorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, ſint peripheriæ ſemicirculo minores AC, DF; ſitque AC, major, quam DF; Ac proinde ABC minor, quam DEF. Dico lineam AC, majorem eſſe, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, major angulo DHF, ex ſcholio propoſ. 27. hujus lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſint lateribus DH, HF, trianguli DHF, c *erit baſis AC, major baſe DF, &c.* *TAB. XIII. fig. 6.* c 24. *primi*

PROBL. 4. PROPOS. 30. xxx.

Datam peripheriam bifariam ſecare.

SIt peripheria ABC, ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens AC, qua diviſa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam ſecabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur *a* & baſes AB, CB, æquales erunt; Ac propterea *b* peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam biſariam ſecuimus. Quod erat faciendum. *TAB. XIII. fig. 7.* a 4. *primi* b 28. *tertii.*

Digitized by Google

latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem
a 8. primi & baſes AC, DF, æquales. Igitur a anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ
b 26. tertii. AC, DF, quibus inſiſtunt, b æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Quod ſi fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet major linea, majorem peripheriam, quam minor, ſi loquamur de ſegmentis circuli minoribus ſemicirculo. Nam ſi de ſegmentis circuli majoribus ſermo habeatur, major linea auferet minorem
TAB. XIII. fig. 6. *peripheriam, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, ſit recta AC, major, quam DF. Dico peripheriam AC, ſemicirculo minorem, majorem eſſe peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem baſis*
c 25. primi *AC, major baſe DF. Igitur* c *angulus AGC, major erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo*
d 26. tertii. *DHF, æqualis; eritque propterea* d *peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, major, quam peripheria DF: Ideoque reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.*

xxix. THEOR. 26. PROPOS. 29.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

TAB. XIII. fig. 5. IN circulis eiſdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas ſubtendunt, eſſe æquales.

æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, *a* æquales, quod æqualibus peripheriis AC, DF, inſiſtant. Igitur *b* baſes AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat oſtendendum. a 27. *tertii.* b 4. *primi*

SCHOLIUM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, ſubtendet majorem major linea, quam minorem, ſi de ſegmentis ſemicirculo minoribus fiat ſermo. Nam ſi de ſegmentis majoribus ſemicirculo loquamur, ſubtendet majorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, ſint peripheriæ ſemicirculo minores AC, DF; ſitque AC, major, quam DF; Ac proinde ABC minor, quam DEF. Dico lineam AC, majorem eſſe, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, major angulo DHF, ex ſcholio propoſ. 27. bujus lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſint lateribus DH, HF, trianguli DHF, c *erit baſis AC, major baſe DF, &c.* *TAB. XIII. fig. 6.* c 24. *primi*

PROBL. 4. PROPOS. 30. XXX.

Datam peripheriam bifariam ſecare.

SIt peripheria ABC, ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens AC, qua diviſa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam ſecabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur *a* & baſes AB, CB, æquales erunt; Ac propterea *b* peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendum. *TAB. XIII. fig. 7.* a 4. *primi* b 28. *tertii.*

Digitized by Google

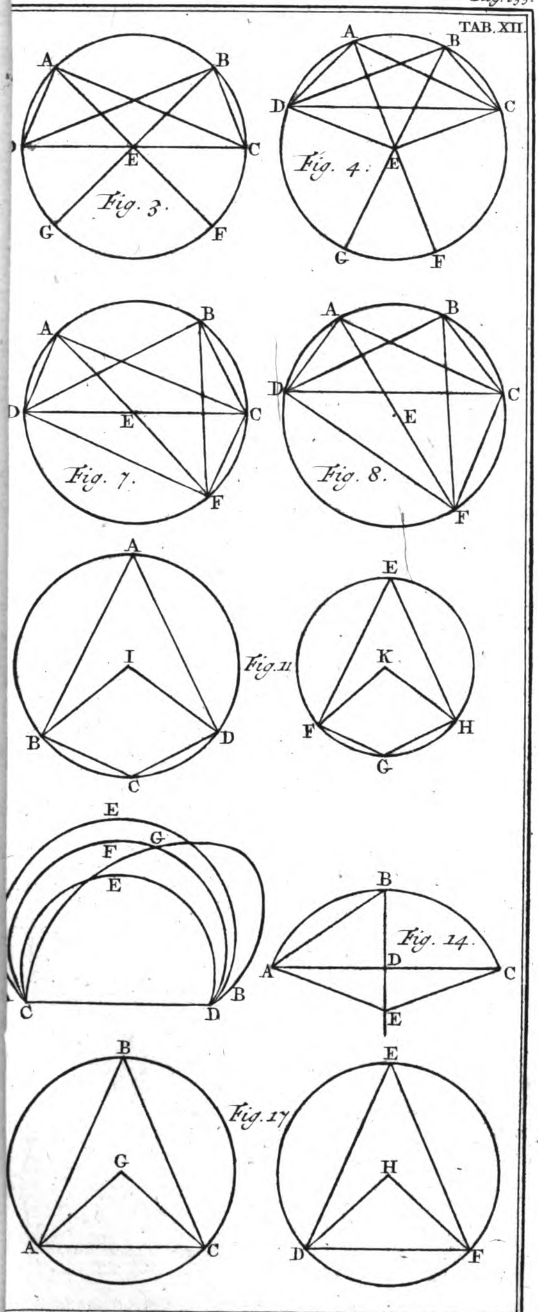
xxxi. THEOR. 27. PROPOS. 31.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in majore ſegmento, minor recto: qui vero in minore ſegmento, major eſt recto. Et inſuper angulus majoris ſegmenti, recto quidem major eſt: minoris autem ſegmenti angulus minor eſt recto.

TAB. XIII. fig. 8. CIrculi enim ABC, cujus centrum D, diameter ſit AC, conſtituaturque in ſemicirculo angulus ABC, exiſtetque angulus BAC, in majori ſegmento CAB. Conſtituatur quoque in CEB, minori ſegmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum vero BAC, in majori ſegmento, minorem recto, & angulum BEC, in minori ſegmento, majorem recto. Item angulum majoris ſegmenti comprehenſum recta BC, & peripheria BAC, eſſe recto majorem. At angulum minoris ſegmenti comprehenſum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur
a 5. primi rectæ DA, DB, æquales ſunt, *a* erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC,
b 32. primi BCA, æqualis erit. *b* Eſt autem & angulus FBC, externus eiſdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli ABC, FBC; ac proptereа uterque rectus. Rectus igitur eſt angulus ABC; quod eſt primum.

c 17. primi Quoniam vero in triangulo ABC, *c* duo anguli ABC, & BAC, ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus ABC, oſtenſus rectus: Erit angulus BAC, in ſegmento majori, recto minor; quod eſt ſecundum.

Rurſus quia in quadrilatero ABEC, intra circulum



Digitized by Google

Digitized by Google

culum deſcripto, *d* duo anguli oppoſiti BAC, & BEC, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, oſtenſus eſt recto minor: Erit BEC, angulus in ſegmento minore, recto major; quod eſt tertium. d 22. tertii.

Amplius cum angulus rectus ABC, pars ſit anguli ſegmenti majoris ABC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus ſegmenti majoris, recto major, quod eſt quartum.

Poſtremo, cum angulus ſegmenti minoris, comprehenſus recta BC, & peripheria BEC, pars ſit quoque anguli recti FBC; Erit angulus ſegmenti minoris, recto minor; quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis exiſtit, rectus eſt, eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eiſdem ſit æqualis.

THEOR. 28. PROPOS. 32. xxxii.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

TAngat recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, dividens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem eſſe angulo CGE, in alterno ſegmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque ſegmento. Tranſeat enim primum, recta CE, per centrum. *a* Erit igitur uterque angulus ACE, BCE, rectus: *b* Sunt autem & anguli CGE, CDE, in ſemicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo TAB. XIII. fig. 9. a 18. tertii. b 31. tertii.

angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis eſt.

TAB.XIII. fig. 10. Non tranſeat jam CE, recta per centrum. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur
c18.tertii. recta EF: *c* eritque CF, perpendicularis ad AB,
d31.tertii. *d* & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt uni recto, ut angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE,
e21.tertii. æqualis: *e* Eſt autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum uterque ſit in ſegmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG,
f22.tertii. duo *f* anguli CDE, CGE, duobus ſunt rectis æ-
g13.primi quales: *g* Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat oſtendendum.

xxxiij. PROBL. 5. PROPOS. 33.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

TAB.XIII. fig. 11. Recta data ſit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur ſuper AB, ſegmentum deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis angulo recto dato C. Diviſa AB, bifariam in D, deſcribatur centro D, intervallo autem DA, vel DB, ſemicirculus AEB; factumque
a31.tertii. erit, quod proponitur. Nam *a* angulus AEB, in deſcripto ſemicirculo rectus eſt, ideoque æqualis angulo C, recto.

TAB.XIII. fig. 12. Sit deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet ſupra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, ſecetque BF, rectam AE, in

Digitized by Google

in F. *b* Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. b 6. primi
Quare ſi centro F, & intervallo FA, circulus deſcribatur AGB, tranſibit is per B. Dico igitur angulum in ſegmento AGB, quod deſcriptum eſt ſuper AB, eſſe æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto ſegmento AGB. Quia igitur AE, per centrum F, tranſit, & ei perpendicularis eſt DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propoſ. 16. hujus lib. Quapropter *c* angulus DAB, hoc eſt, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in ſegmento alterno AGB. c 32. tertii.

Sit tertio angulus datus H, obtuſus. Fiat rurſus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ ſupra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, deſcriptumque erit ſuper AB, ſegmentum AKB, in quo angulus K, æqualis eſt angulo dato obtuſo H. Nam angulus IAB, hoc eſt, angulus datus H, *d* æqualis eſt angulo K, in alterno ſegmento AKB. Eadem enim eſt demonſtratio. Itaque ſuper data recta linea deſcripſimus ſegmentum, &c. Quod efficiendum erat. d 32. tertii.

PROBL. 6. PROPOS. 34. xxxiv.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Datus circulus ſit ABC, à quo auferre oporteat ſegmentum, in quo angulus exiſtens æqualis ſit dato angulo D. *a* Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in ſegmento ablato ACB, æqualem eſſe dato angulo D. Eſt enim *b* angulus FAB, æqualis angulo C, in alterno ſegmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus ſit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus

TAB. XIII. fig. 13. a 17. tertii. b 32. tertii.

Digitized by Google

dimus ſegmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

xxxv. THEOR. 29. PROPOS. 35.

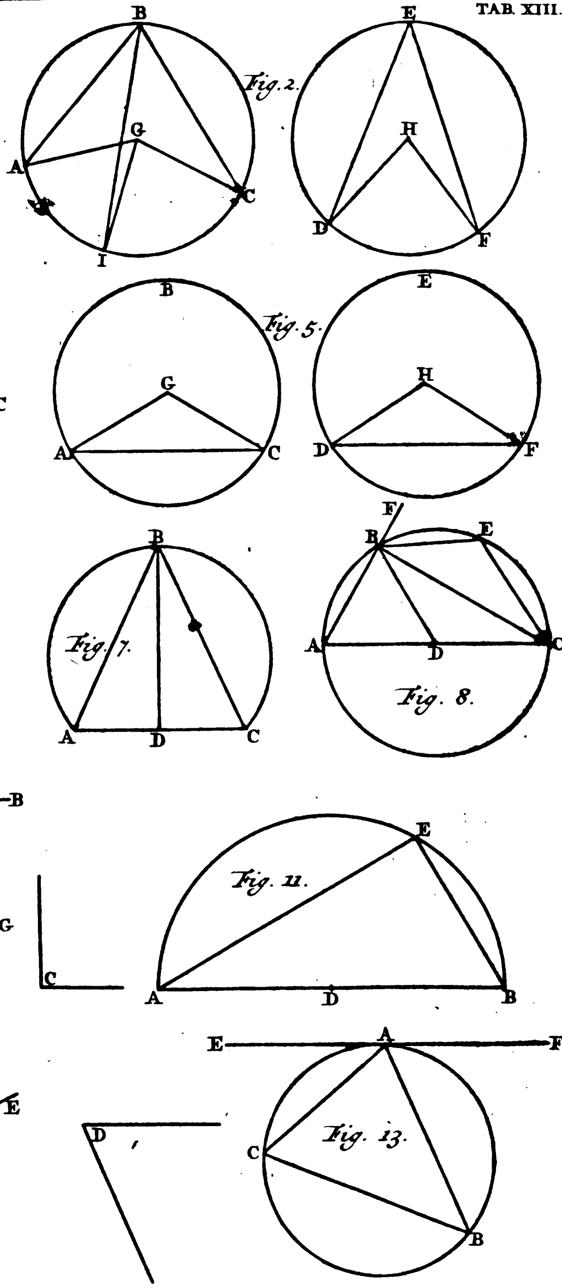
Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

TAB. XIV. fig. 1. In circulo ACBD, ſecent ſe mutuo rectæ AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis AE, EB, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis CE, ED. Aut enim utraque linea tranſit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Tranſeat primum utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus unius lineæ æquale eſſe ei, quod ſub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex iis, quæ ad initium lib. 2. ſcripſimus.

fig. 2. Tranſeat deinde CD, ſola per centrum F, dividatque primum rectam AB, bifariam, *a* ac propterea ad angulos rectos, conjungaturque recta BF. Quoniam igitur CD, diviſa eſt per æqualia in F, & per inæqualia in E, *b* erit rectangulum ſub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, ſint æquales: Eſt autem quadratum rectæ FB, *c* æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum ſub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum ſub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc eſt, rectangulo ſub AE, EB, cum AE, EB, rectæ ſint æquales: ac proinde rectangulum ſub eis comprehenſum, ſit quadratum, ex iis, quæ ad defin. 1. lib. 2. ſcripſimus. Divi-

a 3. tertii.
b 5. ſec.
c 47. primi

TAB. XIII.


Fig. 2.
B
G
A
C
I
E
H
D
F
Fig. 5.
B
G
A
C
E
H
D
F
Fig. 7.
B
A
D
C
Fig. 8.
F
B
E
A
D
C
Fig. 11.
E
C
A
D
B
Fig. 13.
E
A
F
D
C
B

Digitized by Google

Dividat jam CD, tranſiens per centrum rectam *fig.* 3, 4.
AB, non biſariam. Secetur ergo AB, biſariam
in G, ducanturque rectæ FG, FB, *d* eritque FG, d 3. *tertii.*
perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectangu-
lum ſub CE, ED, una cum quadrato rectæ FE,
e æquale eſt quadrato rectæ FD, hoc eſt, qua- e 5. *ſec.*
drato rectæ FB: Eſt autem quadratum rectæ FE,
f æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadra- f 47. *primi*
tum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG,
GB: erit quoque rectangulum ſub CE, ED,
una cum quadratis rectarum FG, GE, æquale
quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo
communi quadrato rectæ FG, remanebit rectan-
gulum ſub CE, ED, una cum quadrato rectæ
GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam
rectangulum ſub AE, EB, una cum quadrato
rectæ GE, *g* æquale eſt eidem quadrato rectæ g 5. *ſec.*
GB: propterea quod recta AB, ſecta eſt biſariam
in G, & non biſariam in E. Igitur rectangulum
ſub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æ-
quale eſt rectangulo ſub AE, EB, una cum
quadrato ejuſdem rectæ GE. Quare ablato com-
muni quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum
ſub CE, ED, æquale rectangulo ſub AE, EB.
Quod eſt propoſitum.

Tertio neutra per centrum tranſeat, ſive una *fig.* 5, 6.
illarum biſariam dividatur, ſive neutra. Ducatur
per centrum F, & punctum ſectionis E, recta
GH. Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum
ſub AE, EB, æquale eſſe rectangulo ſub GE,
EH: ſive AB, dividatur biſariam, ſive non: Item
rectangulum ſub CE, ED, æquale eſſe quoque
eidem rectangulo ſub GE, EH; ſive CD, ſecta
ſit biſariam, ſive non; Erit rectangulum ſub
AE, EB, æquale rectangulo ſub CE, ED, quod
eſt propoſitum. Si in circulo igitur duæ rectæ
lineæ ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod demon-
ſtrandum erat.

THEOR.

XXXVI. THEOR. 30. PROPOS. 36.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & convexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

TAB.XIV. fig. 7. *a 17. tertii.* *b 18. tertii.* *c 6. ſec.* *d 47. primi*

Extra circulum ABC, punctum ſumatur D, à quo linea ducatur DA, ſecans circulum in C, *a* & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum ſub DA, DC, æquale eſſe quadrato rectæ DB. Tranſeat enim primum recta DA, per centrum E, & jungatur recta EB, *b* quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diviſa eſt per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD, *c* erit rectangulum ſub DA, DC, una cum quadrato rectæ EC, hoc eſt, cum quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: Eſt autem quadratum rectæ DE, *d* æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum ſub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum ſub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod eſt propoſitum.

TAB.XIV. fig. 8, 9. *e 18. tertii.* *f 3. tertii.* *g 6. ſec.*

Non tranſeat jam DA, ſecans per centrum E. Diviſa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF; *e* eritque EB, ad BD, perpendicularis; *f* & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diviſa eſt per æqualia in F, & ei addita recta CD, *g* erit rectangulum ſub DA, DC, una cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum ſub DA, DC, una cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF,

DF, FE: Eſt autem quadratis rectarum CF, FE, *h* æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et *i* quadratis rectarum DF, FE, æquale eſt quadratum rectæ DE. Quare rectangulum ſub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, *k* æquale ſit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum ſub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum ſub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

h 47. primi
i 47. primi
k 47. primi

COROLLARIUM. I.

Hinc manifeſtum eſt, ſi à puncto quovis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus inter ſe eſſe æqualia. Ut ſi ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, ſecantes circulum in F, G, H, erunt rectangula ſub AC, AF; Item ſub AD, AG; & ſub AE, AH, æqualia inter ſe. Nam ducta AB, tangente circulum, *l* erunt quadrato rectæ AB, æqualia ſingula illa rectangula; quare & inter ſe omnia æqualia erunt.

TAB. XIV. fig. 10.
l 36. tertii.

COROLLARIUM. II.

Conſtat etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum: quas dico eſſe æquales inter ſe. Ducta enim recta AD, quæ circulum ſecet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC, *m* æquale rectangulo ſub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter ſe æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.

TAB. XIV. fig. 11.
m 36. tertii

Digitized by Google

COROLLARIUM. III.

Perſpicuum quoque eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci poſſit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, *n* erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nam ſi ducatur recta AE, *o* erit angulus ADE, major angulo ABE.

TAB XIV. fig. 12.
n 18. tertii.
o 21. primi

Aliter. Si tertia AD, circulum etiam tangat; erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, ut oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum ſecet in F, *p* erit AD, cum ſit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ à minima AF, remotior eſt. Vel ſic. Si AB, AD, ſunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipſis AD, DE, æquales, quod eſt abſurdum. *q* Sunt enim majores AB, BE. Solum igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod eſt propoſitum.

p 8. tertii.
q 21. primi

COROLLARIUM. IV.

Illud denique conſtat etiam, ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam peripheriam incidant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Ut ſi duæ rectæ AB, AC, ſint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, eruntque ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipſi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod eſt abſurdum. *r* Duæ enim tantum duci poſſunt.

TAB. XIV. fig. 12.
r 8. tertii.

Aliter. Ponantur duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & baſis DE, communis. *s* Igitur anguli B, F, æquales erunt: *t* Sed B, rectus eſt. Igitur & F, rectus erit, atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propoſ. 16. hujus lib.

TAB. XIV. fig. 13.
s 8. primi
t 18. tertii.

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvij.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

EXtra circulum ABC, cujus centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum ſecans in C, & recta DB, incidens in circulum ejuſque punctum B; ſitque rectangulum ſub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. *a* Ducatur enim DF, tangens circulum, & jungantur rectæ EB, EF. Quod ſi DA, ſecans non tranſeat per centrum E, jungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo ſub DA, DC, *b* æquale eſt quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo ſub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter ſe erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia ſunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & baſis DE, communis, *c* erunt anguli DFE, DBE, æquales. *d* Atqui angulus DFE, rectus eſt, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propoſ. 16. hujus lib. DB, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

Tab. xiv. fig. 13. *a 17. tertii.* *fig. 14.* *b 36. tertii.* *c 8. primi.* *d 18. tertii.*

EUCLIDIS ELEMENTUM QUARTUM.

DEFINITIO. I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli ejus figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera ejus, in qua inſcribitur, tangunt.

AGens Euclides quarto hoc libro de variis inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris: Si igitur anguli
TAB.XIV. *D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera*
fig. 15. *AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, eſſe inſcrip-*
fig. 16. *tum. At quoniam angulus M, trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inſcribi in triangulo GHI, quamvis totum illud ſit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.*

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO. II.

Similiter & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula ejus, quæ circumſcribitur, latera ſingulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E Contrario dicetur triangulum ABC, deſcribi circa triangulum DEF; quoniam ſingula latera illius ſingulos hujus angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur deſcriptum eſſe circa triangulum KLM, propterea quod latus illius HI, angulum hujus M, non tangit. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarum rectilinearum. TAB.XIV. fig. 15. 16.

DEFINITIO. III.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli ejus figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

UT ſi tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum. Quod ſi vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum eſſe inſcriptum in circulo. TAB.XV. fig. 1.

DEFINITIO. IV.

Figura vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera ejus, quæ circumſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero ſi latera trianguli ABC, ſingula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum eſſe deſcriptum. TAB.XV. fig. 2.

DEFINITIO. V.

Similiter & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit ejus figuræ, cui inſcribitur.

DEFINITIO. VI.

Circulus autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit ejus figuræ, quam circum ſcribit, angulos.

TAB.XV. fig. 1. *Viciſſim dicetur circulus DEF, inſcriptus eſſe in triangulo ABC: At vero circulus ABC, deſcriptus eſſe circa triangulum ABC. Idem judicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inſcribi, vel circa eundem deſcribi; Aut in quibus circulus dicitur inſcribi, vel circa quas deſcribi circulus dicitur.*

DEFINITIO. VII.

Recta linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.

TAB.XV. fig. 3. *Ut recta linea AB, quoniam ejus extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, exiſtunt, coaptata, ſeu accommodata in dicto circulo eſſe dicetur: Non autem recta E, vel CD; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.*

PROBL.

Digitized by Google

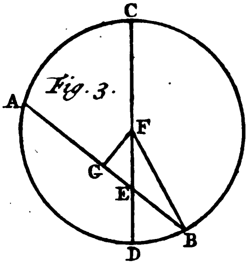


Fig. 3.

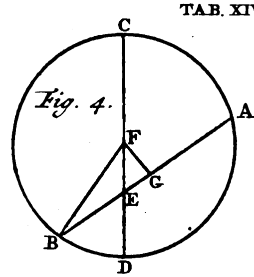


Fig. 4.

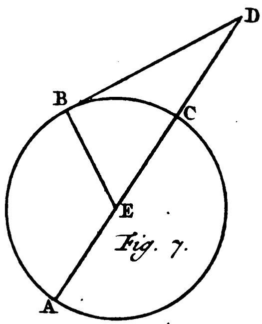


Fig. 7.

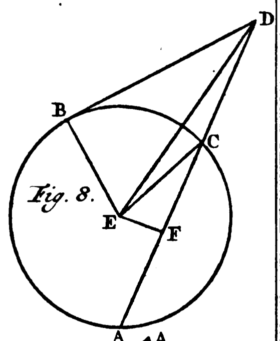


Fig. 8.

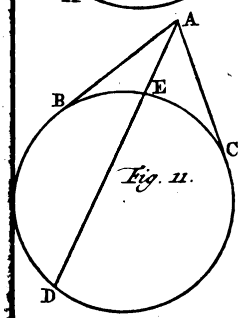


Fig. 11.

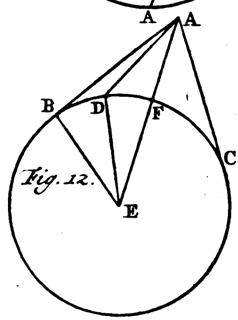


Fig. 12.

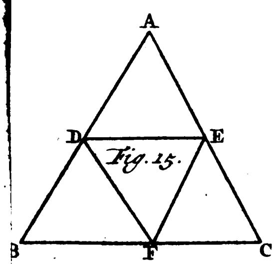


Fig. 15.

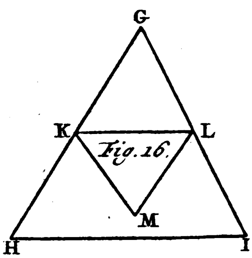


Fig. 16.

Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTUM QUARTUM.

DEFINITIO. I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli ejus figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera ejus, in qua inſcribitur, tangunt.

AGens Euclides quarto hoc libro de variis inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris: Si igitur anguli TAB. XIV. fig. 15. *D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, eſſe inſcriptum.* fig. 16. *At quoniam angulus M, trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inſcribi in triangulo GHI, quamvis totum illud ſit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.*

DEFI-

DEFINITIO. II.

Similiter & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula ejus, quæ circumſcribitur, latera ſingulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E Contrario dicetur triangulum ABC, deſcribi circa triangulum DEF; quoniam ſingula latera illius ſingulos hujus angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur deſcriptum eſſe circa triangulum KLM, propterea quod latus illius HI, angulum hujus M, non tangit. Idem intelligendum eſt de inſcriptionibus, ac circumſcriptionibus aliarum figurarum rectilinearum. TAB. XIV. fig. 15. 16.

DEFINITIO. III.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli ejus figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

UT ſi tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo eſſe inſcriptum. Quod ſi vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum eſſe inſcriptum in circulo. TAB. XV. fig. 1.

DEFINITIO. IV.

Figura vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera ejus, quæ circumſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero ſi latera trianguli ABC, ſingula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum eſſe deſcriptum. TAB. XV. fig. 2.

Digitized by Google

DEFINITIO. V.

Similiter & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit ejus figuræ, cui inſcribitur.

DEFINITIO. VI.

Circulus autem circum figuram deſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingulos tangit ejus figuræ, quam circum ſcribit, angulos.

TAB. XV. fig. 1. *Viciſſim dicetur circulus DEF, inſcriptus eſſe in triangulo ABC: At vero circulus ABC, deſcriptus eſſe circa triangulum ABC. Idem judicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inſcribi, vel circa eundem deſcribi; Aut in quibus circulus dicitur inſcribi, vel circa quas deſcribi circulus dicitur.*

DEFINITIO. VII.

Recta linea in circulo accommodari, ſeu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.

TAB. XV. fig. 3. *UT recta linea AB, quoniam ejus extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, exiſtunt, coaptata, ſeu accommodata in dicto circulo eſſe dicetur: Non autem recta E, vel CD; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.*

PROBL.

Digitized by Google

TAB. XIV.

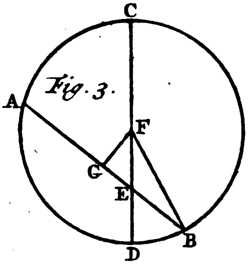


Fig. 3.

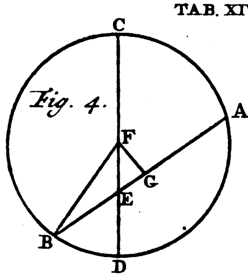


Fig. 4.

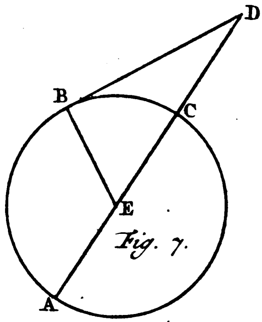


Fig. 7.

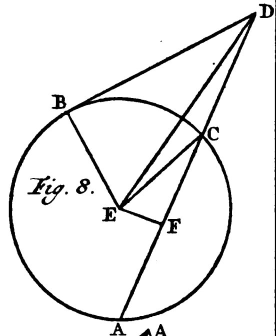


Fig. 8.

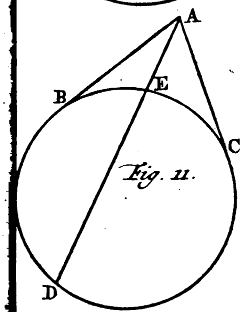


Fig. 11.

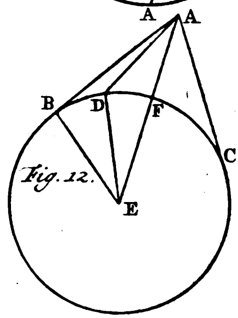


Fig. 12.

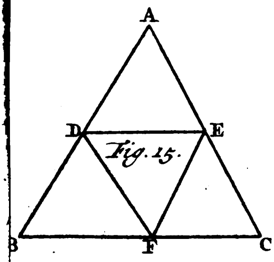


Fig. 15.

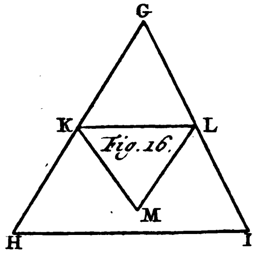


Fig. 16.

Digitized by Google

PROBL. 1. PROPOS. 1. i.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit major.

IN circulo ABC, coaptanda ſit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen major non ſit diametro circuli dati. Cum enim diameter *a* ſit omnium rectarum in circulo maxima, ſi data recta diametro major foret, non poſſet in circulo aptari illi una æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque ſi data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, *b* abſcindatur BE, æqualis ipſi D, & centro B, intervallo autem BE, circulus deſcribatur EA, ſecans circulum ABC, in A, ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. *c* Eſt enim BA, æqualis ipſi BE, & D, æqualis eidem BE, per conſtructionem. Quare AB, & D, inter ſe æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodavimus, &c. Quod faciendum erat.

TAB. XV. fig. 4.
a 15. *tertii.*
b 3. *primi.*
c 15. *def. primi.*

PROBL. 2. PROPOS. 2. ij.

In dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

SIt in circulo ABC, dato deſcribendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E, atque extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam uſque in puncta B, & C, conjungaturque recta BC. (Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quod

TAB. XV. fig. 5.

Digitized by Google

a 17. primi anguli GAB, HAC, hoc eſt anguli F, E, *a* minores ſunt duobus rectis. b 13. primi *b* Eſſent autem duobus rectis æquales, ſi AC, in AB, caderet; vel majores duobus rectis, ſi inter AB, AG, caderet.) Dico triangulum ABC, circulo dato inſcriptum, eſſe æquiangulum dato triangulo DEF. Eſt enim c 32. tertii. angulus C, *c* æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis eſt angulus F, ex conſtructione. Quare anguli C, & F, inter ſe quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, d 32. tertii. *d* æqualis eſt angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter ſe æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales ſint duobus angulis E, & F, trianguli e 32. primi DEF, *e* erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum eſt ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum deſcripſimus, &c. Quod faciendum erat.

iij. PROBL. 3. PROPOS. 3.

Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

TAB. XV. fig 9, 10. Circa circulum datum ABC, deſcribendum ſit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Producto latere EF, utrinque ad G, & H, ſumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, CK, d 13. primi coibunt, *d* &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet ſupra rectas AI, CI, quod hæ angulum conſtituant in I. Cum enim ſpatium circa I, æquale

Digitized by Google

æquale ſit quatuor rectis ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. hoc eſt, quatuor angulis ad E, & F *b*, ſintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum ſpatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed *a* hi minores ſunt duobus rectis. Igitur & ſpatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC. Alias ſpatium illud eſſet vel æquale duobus rectis, ſi nimirum AI, CI, unam rectam lineam conſtituerent; vel majus duobus rectis, ſi recta AI, producta, caderet ſupra IC. Cadit igitur neceſſario AI, producta intra CI, atque idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis, *g* ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non ſecus oſtendemus, AL, BL, coire in L, & CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Deſcriptum eſt igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico eſſe æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales ſunt quatuor rectis, ut ad 32. propoſ. lib. 1. oſtenſum fuit, & anguli IAL, IBL, ſunt duo recti, erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur *b* & anguli DEG, DEF, ſint duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe angulo DFE. *c* Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

b 13. *primi*
a 17. *primi*
g 13. *prim.*
b 13. *primi*
c 32. *primi*

PROBL. 4. PROPOS. 4. iv.

In dato triangulo circulum inſcribere.

SIt deſcribendus circulus in dato triangulo ABC. Diviſis duobus angulis ABC, ACB, bifariam *TAB. XV. fig. 11.*

K 5 rectis

b 9. *primi* rectis BD, CD *b*, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG *c*. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales ſunt duobus angulis, DBF, DFB, trianguli DBF, uterque utrique; & latus BD, commune; *a* erunt quoque latera DE, DF, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, ſint æquales; circulus ex D, ad intervallum DE, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G *d*; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia ſint ad ſemidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

c 12. *primi*

a 26. *primi*

d 15. *def. primi.*

V. PROBL. 5. PROPOS. 5.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

TAB. XV. fig. 12, 13, 14.

SIt circulus deſcribendus circa datum triangulum ABC. Dividantur duo latera AC, AB, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtuſum angulum, quamvis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quævis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E *e*, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia ſunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; *a* erunt baſes FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad intervallum FA, tranſibit quoque per puncta B, & C.

e 10. *primi*

a 4. *primi*

Circa

Circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, *b* omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in majori ſegmento circuli: ſi vero ſit in latere BC, *c* angulum BAC, ei lateri oppoſitum, eſſe rectum quod ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum, *d* angulum oppoſitum BAC, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli. b 31.*tertii.* c 31.*tertii.* d 31.*tertii.*

Contra vero perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſive abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in unum latus, eſſet angulus ei oppoſitus rectus: ſi vero extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectangulo centrum caderet intra, eſſent omnes anguli acuti, ſi vero extra, eſſet angulus oppoſitus obtuſus. Denique ſi in triangulo obtuſangulo caderet in unum latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus, ſi vero intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte hujus coroll colliguntur, & pugnant cum hypotheſi.

PROBL. 6. PROPOS. 6. vi.

In dato circulo quadratum deſcribere.

SIt in dato circulo ABCD, cujus centrum E, inſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe ſe ad angulos rectos in centro E, & jungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, eſſe quadratum inſcriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia ſint ex centro; & anguli contenti ſunt recti; *a* erunt baſes AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, TAB. XV. fig. 15. a 4. primi

AB.

AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter ſe ſunt. Quod brevius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales
b 26. tertii. ſunt, nimirum recti; *b* erunt quatuor arcus, quibus inſiſtunt, æquales: *c* ac proinde & rectæ qua-
c 29. tertii. tuor ſubtenſæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter ſe æqualia ſunt.
d 31. tertii. Sunt autem *d* & anguli recti, cum omnes in ſe-
e 19. def. primi. micirculis exiſtant. Quare quadratum erit ABCD *e*, proptereaque in dato circulo quadratum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

vij. PROBL. 7. PROPOS. 7.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.

TAB. XV. fig. 16. Sit circa datum circulum ABCD, cujus centrum E, deſcribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H,
d 13. prim. I, G. *d* Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico FHIG, eſſe quadratum circa circulum datum deſcriptum. Cum enim anguli
a 28. primi. AEB, FBE, ſint recti, *a* erunt FH, AC, parallelæ; ſimiliterque erunt GI, AC, parallelæ.
b 30. primi. *b* Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur
c 34. primi. parallelogrammum eſt ACHF, *c* erunt latera oppoſita AC, FH, æqualia, & anguli oppoſiti ACH, AFH, æquales: Sed ACH, eſt rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione oſtendemus angulos H, I, G, rectos eſſe: & latera HI, IG, GF, æqualia eſſe diametris BD, AC. Quare cum diametri ſint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH,

Digitized by Google

FGIH, quadratum erit; cujus quidem latera circulum tangunt, per corollarium propoſ. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. viij.

In dato quadrato circulum deſcribere.

SIt in dato quadrato ABCD, inſcribendus circulus. Diviſis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, ſecantes ſe in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ. *a* Quare & AB, parallela eſt, & æqualis ipſi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipſi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter ſe æquales, cum ſint ſemiſſes æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus deſcriptus ex I, ad intervallum IE, tranſibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. *b* quod anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat.

TAB. XV. fig. 17.

a 33. primi

b 29. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9. ix.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

SIt deſcribendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſunt *a* erunt anguli ABD, ADB, æquales:

TAB. XV. fig. 18.

a 5 primi

b 32. primi les: Eſt autem angulus BAD, rectus. *b* Quare ABD, ADB, ſemirecti erunt. Similiter oſtendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, ſint æquales; c 6. primi *c* erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, deſcriptus, intervallo EA, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

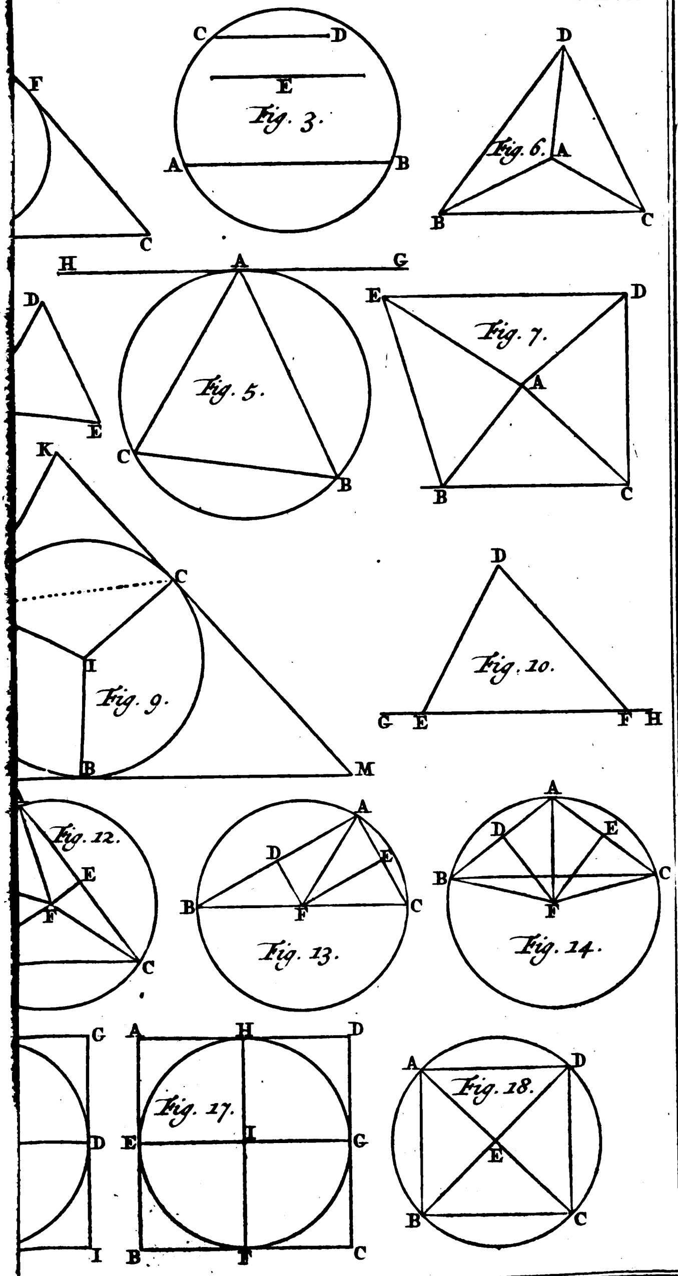
TAB. XVI. fig. 1. *Quod ſi circa datum circulum EFGH, deſcribatur quadratum ABCD, & in eodem circulo aliud quadratum EFGH, inſcribatur, erit quadratum circumſcriptum ABCD, quadrati inſcripti HEFG, duplum. Quoniam enim latus AB, quadrati circumſcripti æquale eſt diametro HF, circuli, ut ex 7. propoſ. hujus lib. conſtat, hoc eſt, diametro HF, quadrati inſcripti HEFG: quadratum vero diametri HF, duplum eſt quadrati HEFG, cujus eſt diameter, ut ad 47. propoſ. lib. 1. oſtendimus; Conſtat propoſitum.*

PROBL. 10. PROPOS. 10.

Iſoſceles triangulum conſtituere; quod habeat utrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum duplum reliqui.

TAB. XVI. fig. 2. SUmatur quævis recta linea, AB, quæ *a* dividatur in C, ita ut rectangulum ſub AB, a 11. ſec. BC, æquale ſit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, intervallo vero AB, circulus deſcribatur, in quo *b* accommodetur recta BD, æqua- b 1. quart. lis ipſi AC, jungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales ſunt, erit triangulum ABD, Iſoſceles. Dico utrumque angulorum ABD, ADB, duplum eſſe reliqui anguli A.

TAB. XV.



Digitized by Google

Digitized by Google

A. Ducta enim recta CD, *c* deſcribatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ BD, & recta AB, ſecat circulum DCA, *d* tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, *e* æqualis eſt angulo A, in alterno ſegmento CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eiſdem *f* æqualis eſt etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc eſt, angulo ABD, *g* cum ABD, ADB, æquales ſint; ac propterea *h* rectæ CD, BD, æquales erunt: Eſt autem BD, æqualis poſita rectæ AC. Igitur & CD, ipſi CA, æqualis erit; *i* ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis oſtenſus eſt duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit ejuſdem anguli A. Iſoſceles ergo Triangulum conſtituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

c 5. quin.
d 37. tertii.
e 32. tertii.
f 32. primi
g 5. primi
h 6. primi
i 5. primi

COROLLARIUM.

Quoniam vero tres anguli trianguli ABD, *k* æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, quinque quintis duorum rectorum: perſpicuum eſt, angulum A, eſſe quintam partem duorum rectorum; utrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, eſſe duas quintas partes unius recti, & utrumvis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres *l* æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, decem quintis unius recti.

k 32. primi
l 32. primi

PROBL. II. PROPOS. II. xi.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIt in dato circulo ABCDE, inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. TAB. XVI. fig. 3.

a Con-

Digitized by Google

a 10. quart. *a* Conſtruatur triangulum Iſoſceles, FGH, ita ut uterque angulorum G, H, duplus ſit reliqui F,
b 2. quart. & in circulo *b* inſcribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & uterque angulo-
c 9. primi rum ACD, ADC, *c* bifariam dividatur rectis CE, DB, atque rectæ jungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum ACD, ADC, duplus ſit anguli CAD, & diviſus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD,
d 26. tertii. DCE, ECA, æquales. *d* Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, ſuper quos aſcenderunt, atque
e 29. tertii. idcirco *e* & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt, æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, ED, æquales ſunt; addito communi BCD, fient æquales
f 27. tertii. ABCD, EDCB. *f* Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus inſiſtentes, æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM.

Sequitur hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas unius recti.
g 27. tertii. *g* Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales ſint, utpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtant, ſit autem CAD, per coroll. præcedentis propoſ. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ unius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum, vel ſex quintæ unius recti.

PROBL.

Digitized by Google

PROBL. 12. PROPOS. 12. xij.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit circa datum circulum ABCDE, deſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Inſcribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus ſint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; *b* coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & ſic de aliis. Et quia ipſæ tangunt circulum, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico eſſe æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectæ FH, *c* æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quam rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarum FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam conſtat ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH, æqualia ſunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Eſt autem & baſis AH, baſi BH, æqualis, ut oſtenſum eſt; *d* erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur *e* & anguli AHF, BHF. Duplus igitur eſt angulus AFB, anguli BFH, & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo oſtendemus, angulum BFC, duplum eſſe anguli BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cum igitur *f* anguli AFB, BFC, ſint æquales, quod in-

TAB. XVI. fig. 4.
a 11. quart.
b 13. prim.
c 47. primi
d 8. primi
e 4. primi
f 27. tertii

Digitized by Google

g 28. tertii. ſiſtant circumferentiis AB, BC, *g* quæ æquales ſunt, cum à rectis æqualibus ſubtendantur AB, BC; erunt & dimidii eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales ſint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adjacens com-
h 26. primi mune BF, *h* erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla eſt ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione oſtendemus GH, rectam duplam eſſe rectæ AH. Sunt autem oſtenſæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonſtrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales eſſe cuilibet rectarum HI, HG. Æquilaterum ergo eſt pentagonum GHIKL. Rurſus quoniam oſtenſum eſt, angulos BHF, BIF, æquales eſſe, ac ſemiſſes angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum igitur eſt pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hujus problematis demonſtratione; ſi in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares conſtituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumſcriptam. Eadem enim ſemper ratione demonſtrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosque conficere æquales, ſi nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, ut in pentagono factum eſt: quæ quidem ipſos angulos bifariam ſecabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum eſt, &c.

In

SCHOLIUM.

In figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quovis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, dividit quoque angulum bifariam; Et contra, recta linea dividens angulum bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam: Si vero numerus angulorum eſt par, recta linea ex quovis angulo ad oppoſitum angulum ducta ſecat utrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea ſecans quemvis angulum bifariam cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam quoque dividit.

Sit primum figura æquilatera, æquiangulaque imparium laterum ABCDEFG, *& ex angulo* A, *demiſſa recta* AH, *ſecet latus oppoſitum* DE, *bifariam.* TAB. XVI. fig. 5. *Dico angulum quoque* BAG, *ſectum eſſe bifariam. Ductis enim ex* A, *rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera* BA, BC, *duobus lateribus* GA, GF, *æqualia ſunt anguloſque continent æquales, ex hypotheſi;* i *erunt & baſes* AC, AF, i 4. primi *æquales, & tam anguli* BAC, GAF, *quam* BCA, GFA: *ac proinde cum toti anguli* BCD, GFE, *ponantur æquales; erunt quoque reliqui* ACD, AFE, *æquales. Quia igitur rurſus duo latera* CA, CD, *duobus lateribus* FA, FE, *æqualia ſunt, continentque angulos æquales, ut oſtenſum eſt;* k *erunt & baſes* AD, AE, *æquales, & tam anguli* CAD, FAE, *quam* CDA, FEA. k 4. primi *Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppoſitum perventum ſit. Ubi quia rurſus toti anguli* CDE, FED, *æquales ſunt; erunt quoque reliqui* ADH, AEH, *æquales. Quare cum duo latera* DA, DH, *duobus lateribus* EA, EH, *æqualia ſint, anguloſque æquales contineant,* l *erunt etiam anguli* DAH, EAH, *æquales.* l 4. primi *Quocirca cum quotvis anguli* BAC, CAD, DAH, *totidem angulis* GAF, FAE, EAH, *ſint æquales, ſinguli ſingulis; erit quoque totus angulus* BAH, *toti*

toti angulo GAH æqualis; ac proinde angulus BAG, ſectus erit bifariam. Quod eſt propoſitum.

Sed jam recta AH, ſecet angulum BAG, bifariam. Dico eam ſecare quoque latus oppoſitum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non ſecari bifariam, ſi ex A, ducatur alia recta ſecans DE, bifariam, ſecabit eadem & angulum BAG, bifariam, ut jam oſtendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, ſecabunt bifariam, quod eſt abſurdum, cum una medietas major eſſet quam altera. Recta ergo AH, ſecans angulum BAG, bifariam, ſecat quoque latus DE, bifariam. Quod eſt propoſitum.

TAB. XVI. fig. 6. *Sit deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppoſitum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, ſecare tam angulum BAH, quam DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis, demonſtrabimus, ut in antecedente figura, quotvis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, eſſe æquales ſingulos ſingulis; ideoque totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem eſſe, nec non & angulum DEA, FEA, eſſe æqualem. Uterque igitur angulus BAH, DEF, ſecatur bifariam. Quod eſt propoſitum.*

Sed jam recta EA, ſecet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppoſitum E, eumque dividere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, ſi ex A, ad E, ducatur alia recta, ſecabit ea angulum BAH, bifariam, ut jam oſtendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam ſecabunt, quod eſt abſurdum. Recta ergo AE, ſecans angulum BAH, bifariam, cadit in E, ſecatque propterea, ut demonſtratum eſt proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod eſt propoſitum.

xiij. PROBL. 13. PROPOS. 13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

TAB. XVI. fig. 7. SIt inſcribendus circulus in dato pentagono ABCDE. Dividantur duo ejus anguli BAE, ABC,

ABC, proximi biſariam *a* rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cum enim ex ſcholio præcedentis propoſitionis rectæ AF, BF, ſecent oppoſita latera CD, DE, biſariam, neceſſe eſt, duas rectas AF, BF, ſe mutuo intra pentagonum ſecare, priuſquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia ſunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex conſtructione, & anguli ipſis contenti æquales ABF, CBF; *b* erunt baſes AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium ſit anguli BAE, per conſtructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diviſus eſt ergo angulus BCD, biſariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diviſos eſſe biſariam. Ducantur jam ex F, ad ſingula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales ſunt duobus angulis, FLA, FAL, trianguli FAL; eſtque latus AF, ſubtenſum uni æqualium angulorum commune *c* erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque oſtendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet iſtarum. Circulus igitur deſcriptus ex centro F, & intervallo FG, tranſibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum ſemidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inſcriptus. Quod faciendum erat.

a 9. *primi*

b 4. *primi*

c 26. *primi*

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.

SIt circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus deſcribendus. Diviſis

TAB. XVI. fig. 8.

b 9. primi viſis duobus angulis BAE, ABC, bifariam *b* rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, ut in antecedente propoſ. demonſtratum eſt; & conjunctis rectis FC, FD, FE, oſtendemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA. ſectos eſſe bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidii inter ſe æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales ſunt
a 6. primi EAB, FBA; *a* erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet iſtarum æquales. Quare circulus deſcriptus ex centro F, intervallo autem FA, tranſibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

XV. PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

TAB. XVI. fig. 9. SIt in dato circulo ABCDEF, cujus centrum G, inſcribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, deſcribatur circulus ex centro D, intervallo vero DG, qui ſecet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico eſſe & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis ſit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli: erunt & rectæ GC, DC, æquales inter ſe: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare *a* tres
a 5. primi anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter ſe
b 32. primi erunt: qui cum *b* æquales ſint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum: Sunt autem

tres

tres anguli CGD, DGE, EGF, *c* æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter ſe æquales; quibus cum etiam *d* æquales ſint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt ſex anguli ad centrum G, æquales. *e* Quare circumferentiæ, quibus inſiſtunt, *f* ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum eſt hexagonum ABCDEF. Rurſus quia circumferentia BC; æqualis eſt circumferentiæ AF; ſi addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipſis inſiſtentes BAF, ABC, *g* æquales erunt. Similiterque oſtendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales eſſe cuilibet iſtorum, quia nimirum quilibet inſiſtit arcui compoſito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inſcripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus inſiſtere. Quare æquiangulum quoque eſt hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

c 13. *primi*
d 15. *primi*
e 26. *tertii*
f 29. *tertii*
g 27. *tertii*

COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, Hexagoni latus æquale eſſe ſemidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale eſt ſemidiametro DG, ex definitione circuli.

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvi.

In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIt in dato circulo ABC, inſcribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Conſtituto triangulo æquilaterò D, quod ex corol. propoſ. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum; *a* inſcribatur ei æquiangulum triangulum ABC. in

TAB XVI. fig. 10.
a 2. *quart.*

in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, b 26. vel 28. tertii. ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. *b* eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB, c 11. quart. qui tertia pars eſt totius circumferentiæ. *c* Inſcribatur rurſus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum AEFGH, applicans u- d 28 tertii. num angulorum ad punctum A, *d* eruntque quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars exiſtens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus e 30. tertii. arcus EB, duas. *e* Diviſo ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI, pars decima quinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, ſubtendet decimam quintam partem totius circumferentiæ; f 1. quart. cui ſi aliæ quatuordecim, *f* æquales in circulo accommodentur, inſcriptum erit in circulo quin- g 27. tertii. tidecagonum æquilaterum, quod *g* & æquiangulum eſt, cum ejus anguli ſubtendant arcus æquales, compoſitos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, ut perſpicuum eſt, In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

Similiter autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſupra, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datum quintidecagonum deſcribemus circulum.

EUCLI-

Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTUM QUINTUM.

EGit in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua abſolute conſiderata; Nunc vero duobus ſequentibus de eadem diſputat non abſolute, ſed prout una ad aliam refertur, hoc eſt, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non deſcendendo ad ullam quantitatis ſpeciem, ut ad lineam, ſuperficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro oſtendit in ſpecie, quamnam proportionem habeant inter ſe lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Ut igitur inſtitutum ſuum ſervet, definit prius vocabula, quæ ad demonſtrationes proportionum adhibentur.

DEFINITIO. I.

Pars eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

ITaque ait magnitudinem illam minorem, quæ majorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Ut quoniam magnitudo A, ter ſumpta, TAB.XVI. fig. 11.

 metitur

metitur magnitudinem B, ſexies autem ſumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, ſed ſumpta bis, excedit magnitudinem E, & ſumpta ter, deficit à magnitudine F, ſumpta autem quater, eandem ſuperat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DEFINITIO. II.

Multiplex autem eſt major minoris, cum minor metitur majorem.

TAB. XVI. fig. 11. *UT in ſuperiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex eſt magnitudinis A, quoniam hæc utramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex eſt dicenda magnitudinis D, propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita ut minor quantitas menſurans majorem, dicatur pars majoris; Major vero menſurata à minori, dicatur minoris multiplex.*

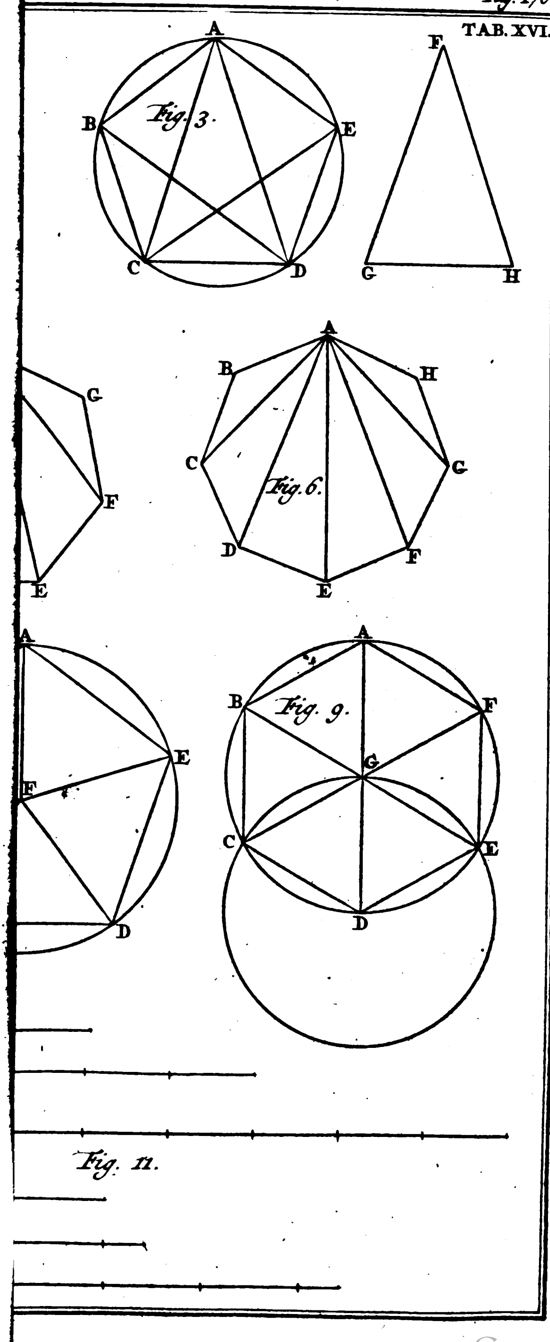
Cæterum quando duæ magnitudines minores duas alias majores æque metiuntur, hoc eſt, una minor in una majore toties continetur, quoties altera minor in altera majore; dicuntur duæ hæ majores duarum illarum minorum æque multiplices. Quod idem dices, ſi plures minores æque metiantur plures majores.

DEFINITIO. III.

Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis mutua quædam ſecundum quantitatem, habitudo.

QUando duæ quantitates ejuſdem generis, ut duo numeri, duæ lineæ, duæ ſuperficies, duo ſolida,

TAB. XVI.



Digitized by Google

da, &c. inter ſe comparantur ſecundum quantitatem, hoc eſt, ſecundum quod una major eſt, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur hujuſmodi comparatio, ſeu habitudo mutua, Ratio; ſeu (ut aliis placet) Proportio. Itaque ſi comparetur linea aliqua cum ſuperficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neque linea, & ſuperficies; neque numerus, & linea ſint ejuſdem generis quantitatis. Similiter ſi conferatur linea aliqua cum alia linea ſecundum qualitatem, hoc eſt ſecundum quod una eſt alba, & altera nigra; aut quod una eſt calida, & altera frigida, &c. quamvis ambæ ſint ejuſdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit ſecundum quantitatem.

Quamquam autem in ſolis quantitatibus propriè reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam ſapiunt quantitatis, cujuſmodi ſunt tempora, ſoni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, ſi eorum habitudo conſideretur ſecundum quantitatem. Ut cum dicimus, tempus tempore eſſe majus, vel minus, vel duo tempora eſſe æqualia, &c. appellabitur ejuſmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc conſiderantur, veluti quantitates quædam.

Cæterùm in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris aliis antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, conſequens proportionis dici ſolet. Ut in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis conſequens. Quod ſi è contrario conſideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, conſequens vero linea 6. palmorum, & ſic in cæteris.

DEFI-

DEFINITIO. IV.

Proportio vero eſt rationum ſimilitudo.

QUod hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, pleriſque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter ſe, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Ut ſi proportio quantitatis A, ad quantitatem B, ſimilis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, ſi ſimilis fuerit proportio E, ad F, proportioni, F, ad G, appellabitur hæc ſimilitudo proportionalitas.

TAB. XVII. fig. 1. fig. 2.

Euclides de ſola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex eſt, continua altera, in qua ſingulæ quantitates intermediæ bis ſumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, ſed quælibet quantitas intermedia ſit & antecedens, & conſequens; Antecedens quidem quantitatis ſubſequentis, conſequens vero quantitatis antecedentis. Ut ſi dicatur, quæ eſt proportio E, ad F, ea eſt F, ad G, vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero diſcreta, ſeu non continua, in qua ſingulæ quantitates intermediæ ſemel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas ſit & antecedens, & conſequens, ſed vel antecedens tantum, vel conſequens tantum. Ut ſi dicatur, quæ proportio A, ad B, ea eſt C, ad D, appellabitur proportionalitas hæc, diſcreta, ſive non continua.

fig. 2. fig. 1.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO. V.

Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſe ſe mutuo ſuperare.

QUoniam Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum ejuſdem generis, vocaverat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates ejuſdem generis, ut proportionem dicantur habere. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter ſe, quarum utravis multiplicata ita augetur, ut alteram tandem ſuperet, adeo ut ſi alterutra quantumvis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur.

DEFINITIO. VI.

In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficiunt, vel una æqualia ſunt, vel una excedunt; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent.

EXplicat hoc loco Euclides, quaſnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum,

tam

tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta: ſumanturque prima, & tertia æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipſius A; & F, ipſius C: Item ſumantur ſecundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipſius B; & H, ipſius D, ſive hæc duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecundæ, & quartæ, ſicut priora duo multiplicia ſunt primæ, & tertiæ, ſive non. Quod ſi jam inter ſe conferantur ſumpta æque multiplicia ea, quæ inter ſe reſpondent, ut multiplex primæ, & multiplex ſecundæ inter ſe, hoc eſt, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter ſe, hoc eſt, F, & H; deprehenſumque fuerit perpetuo, ea ita inter ſe habere, ut ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æquale fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit ipſi H: Aut denique ſi E, majus fuerit quam G; etiam F, majus ſit quam H: (quod eſt utrumque ab utroque vel una deficere, vel una æqualia eſſe, vel una excedere) ita ut in nullo genere multiplicium contrarium poſſit reperiri, id eſt, ut nunquam E, minus ſit quam G, quin & F, minus ſit quam H; & ut nunquam E, æquale ſit ipſi G, quin & F, ipſi H, ſit æquale. Denique ut nunquam E, majus ſit quam G, quin & F, majus ſit, quam H. Si inquam deprehenſum fuerit; æque multiplicia quævis accepta, perpetuo ſe ſe ita habere, ut dictum eſt; dicetur eadem eſſe proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundam magnitudinem B, quæ eſt proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod ſi deprehenderetur aliquando, etiam in ſolo uno genere multiplicium, multiplex

TAB. XVII. fig. 3.

tiplex E, deficere à multiplici G, non autem multiplex F, deficere à multiplici H; Aut E, æquale eſſe ipſi G, at F, non æquale ipſi H; Aut denique E, excedere ipſum G, at F, non excedere ipſum H, quamvis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propoſitæ eandem habere proportionem, ſed diverſas, ut ex defin. 8. fiet perſpicuum.

Itaque ut demonſtratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, oſtendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis ſervatur) quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuſcunque æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere ſemper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut exceſſus; ita ut nunquam contrarium ejus inveniri poſſit. Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque neceſſe eſt, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut exceſſus conditionem.

DEFINITIO. VII.

Eandem autem habentes rationem magnitudines; Proportionales vocentur.

UT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continuæ inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G: Quædam vero proportionales

TAB. XVII. fig. 1, 2.

tionales ſunt non continue, ſed diſcrete, cujuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, ut dictum eſt in 4. definitione.

DEFINITIO. VIII.

Cum vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam majorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DEclarat hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut majorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si ſumpta ſint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia ſecundæ & quartæ; deprehenſumque fuerit aliquando, (licet non ſemper) multiplex primæ majus eſſe multiplice ſecundæ, multiplex autem tertiæ non eſſe majus multiplice quartæ, ſed vel minus, vel æquale; dicetur major eſſe proportio primæ magnitudinis ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam: ut perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, ſumpta ſunt triplicia E, & F; ſecundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E; multiplex primæ majus quidem eſt quam G, multiplex ſecundæ; At F, multiplex tertiæ majus non eſt quam H, multiplex quartæ, dicetur major eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam; quam C, tertiæ, ad D, quartam.

TAB. XVII. fig. 4.

Non eſt autem neceſſe, ut quatuor magnitudinum,

prima

prima ad ſecundam dicatur majorem habere proportionem quam tertia ad quartam, æque multiplicia ſecundum quamvis multiplicationem ſic ſe habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; ſed ſatis eſt, ut ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque interdum fieri, ut tam multiplex primæ majus ſit multiplice ſecundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ. Item ut & multiplex primæ minus ſit multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex primæ ſuperat quidem multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ vel minus eſt, vel æquale multiplici quartæ: propterea majorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quam tertia ad quartam, non autem eandem.

Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, neceſſe eſt, ut æque multiplicia earum, juxta quaſvis multiplicationes acceptа, vel una deficiant, vel una æqualia ſint, vel una excedant, ut in 6. def. fuit expoſitum: Ut autem majorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, ſatis eſt, ut ſecundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex ſecundæ, multiplex vero tertiæ non ſuperet multiplex quartæ quamvis juxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ una excedant æque multiplicia ſecundæ, & quartæ.

Quod ſi quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplice ſecundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamvis ſecundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ una defi-

deficiant ab æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ.

DEFINITIO. IX.

Proportio autem in tribus terminis pauciſſime conſiſtit.

QUoniam omnis Analogia, ſeu proportionalitas, quam interpres, ut dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, ut minimum, duos terminos antecedentes, ac duos conſequentes. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſive magnitudines; At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus unius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcunque ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

DEFINITIO. X.

Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, uno amplius, quam diu proportio extiterit.

TAB. XVII. fig. 5. *VEluti ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita ut ea ſit proportio A,*

A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D: & D, ad E: proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata ejus proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, ut propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata ejus proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interjiciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.

Quod ſi è contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

Digitized by Google

DEFINITIO. XI.

Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

DEfinivit ſupra proportionalitatem, proportionum eſſe ſimilitudinem. Docet jam, non ſolum in proportionalitate quavis proportiones dici ſimiles; Verum etiam terminos ipſos, ſeu quantitates, ſimiles dici, homologaſve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, ſeu ſimiles proportione inter ſe, nec non conſequentes inter ſe, ut intelligeremus in quam plurimis demonſtrationibus, quænam latera figurarum inter ſe comparata, antecedentia debeant eſſe proportionum, & quænam conſequentia, ut in 6. lib. perſpicuum fiet. Si igitur eſt proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicetur quantitas A, ſimilis quantitati C, & B, ſimilis ipſi D. Propter ſimilitudinem enim proportionum, neceſſe eſt, utramque magnitudinem antecedentem vel æqualem eſſe utrique conſequenti, vel eodem modo majorem, aut minorem: Alias non haberet utraque antecedens ad utramque conſequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propoſitis, in quibus antecedentes majores ſunt eodem modo conſequentibus. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continuè proportionalibus, ubi tam E, & F, homologæ ſunt, quam F, & G, ut conſtat. Atque hanc ob cauſam Euclides in defin. 6. & 8. juſſit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc eſt, antecedentium: Item alia æque multiplicia ſecundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum conſequentium. Hæ enim ſimiles ſunt in mag-

TAB. XVII. fig. 6.

Digitized by Google

magnitudinibus proportionalibus, ut ex hac definitione conſtat: in magnitudinibus vero non proportionalibus diſſimiles.

DEFINITIO. XII.

Alterna ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

Alterna igitur ſeu permutata proportio, inquit, eſt, cum propoſitis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem eſſe proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem poſterioris, quam habet conſequens illius ad conſequentem hujus. Ut ſi ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem eſſe proportionem A, ad C, quæ eſt B, ad D, dicemur argumentari à permutata proportione. Græci ſcriptores in hac argumentatione utuntur hoc fere modo loquendi: Ut eſt A, ad B, ita C, ad D; Igitur permntando, ſeu viciſſim, erit quoque A, ad C, ut B, ad D. Firmam autem eſſe hujuſmodi illationem, demonſtrabitur propoſ. 16. libri hujus. Cæterum in hoc modo argumentandi, neceſſe eſt, omnes quatuor magnitudines eſſe ejuſdem generis, ut inter binas ut ut aſſumptas proportio eſſe poſſit. TAB. XVII. fig. 7.

DEFINITIO. XIII.

Inverſa ratio, eſt ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad conſequentem.

Ut ſi ex eo, quod eſt A, ad B, ut C, ad D, inferamus, ita eſſe B, ad A, ut D, ad C, TAB. XVII. fig. 7.

hoc eſt, conſequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inverſa proportione. In hac argumentatione ſic fere loquuntur auctores. Ut eſt A, ad B, ita C, ad D; Igitur convertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A, ut D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum eſſe, oſtendetur in coroll. propoſ. 4. hujus lib. Porro duæ priores magnitudines poſſunt eſſe unius generis, & poſteriores alterius.

DEFINITIO. XIV.

Compoſitio rationis, eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ceu unius, ad ipſam conſequentem.

TAB. XVII. fig. 8. *SIt proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque eſſe proportionem totius AC, nempe antecedentis cum conſequente, ad BC, conſequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum conſequente, ad EF, conſequentem; dicetur hujuſcemodi argumentatio compoſitio rationis, eo quod ex antecedente, & conſequente componatur aliud novum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos ſcriptores reperies in hac argumentatione; Ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, ut DF, ad EF. Demonſtrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propoſ. 18.*

DEFINITIO. XV.

Diviſio rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.

TAB. XVII. fig. 9. *UT ſi dicatur, quæ proportio eſt totius AB, ad CB, ea eſt totius DE, ad FE; Igitur erit & AC,*

AC, exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat; ad CB, conſequentem, ut DF, exceſſus, quo conſequentem excedit antecedens, ad FE, conſequentem. In diviſione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo dividendo, &c. Hæc porro illatio oſtendetur propoſ. 17. hujus lib.

DEFINITIO. XVI.

Converſio rationis, eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſam conſequentem.

Quod ſi colligamus hoc modo. Sicut eſt tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, ut DE, ad DF; Dicemur per converſionem rationis argumentari. Unde ſic fere loquuntur ſcriptores. Igitur per converſionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propoſ. 19. hujus lib. TAB. XVII. fig. 9.

DEFINITIO. XVII.

Ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ſic & in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam ſeſe habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.

Sint plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, ſintque bina ac bina in eadem proportione, hoc eſt, A, ad B, ut D, ad TAB. XVII. fig. 10.

 E,

E, & B, ad C, ut E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam eſſe proportionem A, ad C, prima ad ultimam in primis magnitudinibus, quæ eſt D, ad F, prima magnitudinis ad ultimam in ſecundis magnitudinibus; dicetur hujuſmodi argumentandi formula deſumpta ex æquo, ſive ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines, ſubductis mediis, colliguntur habere unam, eandemque inter ſe proportionem, ut in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, uno quidem, quando ſumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero vero, cum ordo invertitur; explicat Euclides duabus ſequentibus definitionibus, quid ſit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

DEFINITIO. XVIII.

Ordinata proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, ut conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

TAB. XVII. fig. 11. *UT quando fuerit A, ad B; ut D, ad E; Rurſus ut B, conſequens ad aliud quidpiam, ut ad C, ita E, conſequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quam in ſecundis ſervatur; cum utrobique conferatur primum prima cum ſecunda; deinde ſecunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate ſervatur Ordinata proportio, demonſtratur propoſ. 22. hujus lib. eam argumentationem eſſe bonam.*

DEFI-

DEFINITIO. XIX.

Perturbata autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & aliis, quæ ſint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem ſit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur hujuſcemodi proportio, Perturbata: quod non ſervetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum ſecunda, at in ſecundis ſecunda cum tertia; deinde in primis ſecunda cum tertia, at in ſecundis prima cum ſecunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate ſervatur Perturbata proportio, demonſtratur eam argumentationem eſſe bonam, propoſ. 23. hujus lib. TAB. XVIII. fig. 1.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices; quam multiplex eſt unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SInt quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico TAB. XVIII. fig. 2.

Dico magnitudines AB, CD, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex AB, ipſius E, vel CD, ipſius F. Cum enim AB, CD, ſint æque multiplices ipſarum E, & F, ſi AB, dividatur in magnitudines AG, GH, HB, ipſi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipſi F, æquales; (Dividi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, ſint ipſarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte contineatur, quoties F, in CD, ut ex iis, quæ in defin. 2. hujus lib. ſcripſimus, conſtat) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales CI, & F, *a* erunt AG, CI, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt GH, & IK, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul; Nec non HB, & KD, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, ſimul, in AB, CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB, CD, ſimul, ipſarum E, & F, ſimul, ut conſtat ex iis, quæ in defin. 2. lib. hujus ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 2. pron.

ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ, erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

TAB. XVIII. fig. 3.

Sit magnitudo prima AB, tam multiplex ſecundæ C, quam eſt multiplex DE, tertia, quartæ

TAB. XVII.

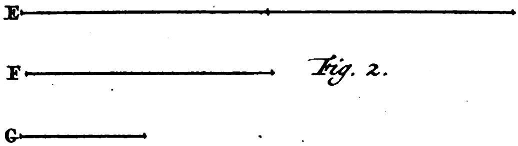


Fig. 2.



...g. 3.



Fig. 4.

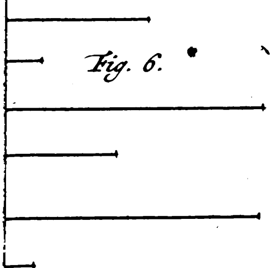


Fig. 6.

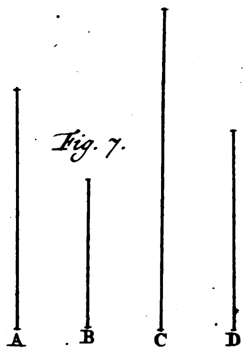


Fig. 7.

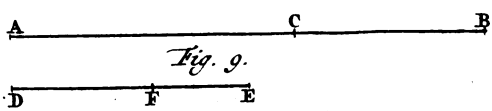


Fig. 9.

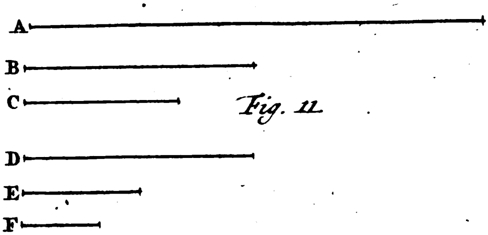


Fig. 11.

Digitized by Google

Digitized by Google

tæ F; Rurſus tam ſit multiplex BG, quinta ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt EH, ſexta ipſius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compoſitam, tam multiplicem eſſe ſecundæ C, quam multiplex eſt, DE, tertia compoſita cum ſexta EH, ipſius F, quartæ. Cum enim AB, & DE, ſint æque multiplices ipſarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipſi C, æquales, quot ſunt in DE, æquales ipſi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipſi C, quot ſunt in EH, æquales ipſi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH, erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH: Ideoque tam multiplex eſt AG, (prima compoſita cum quinta) ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt DH, (tertia compoſita cum ſexta) ipſius F, quartæ. Si prima itaque ſecundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si ſit prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, ſumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

Sit prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumanturque E, F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem eſſe E, ipſius B, ſecundæ, quam eſt F, ipſius D, quartæ. Nam cum E, & F, ſint æque multiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, ut in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt *TAB. XVIII. fig. 4.*

in F, æquales ipſi C. Quoniam vero EG, FK, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æque multiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam eſt multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex eſt ejuſdem ſecundæ B, quam multiplex eſt KL, ſexta ejuſdem quartæ D, *a* Erit & EH, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex FL, compoſita ex tertia & ſexta, quartæ D. Rurſus cum ſit EH, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt FL, tertia quartæ D, ut proxime demonſtratum eſt; ſit autem & HI, quinta tam multiplex ſecundæ B, quam eſt LM, ſexta multiplex quartæ D; *b* Erit & EI, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt FM, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.

a 2. *quint.*
b 2. *quint.*

iv. THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi, prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

TAB. XVIII. fig. 5.

SIt proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item ſecundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, juxta quamvis multipli-

Digitized by Google

tiplicationem: ſive E, F, ita multiplices ſint ipſarum A, C, ſicut G, H, ipſarum B, D, ſive non. His poſitis conſtat ex defin. 6. hujus lib. ſi E, deficit à G, etiam F, deficere ab H; Et ſi E, æqualis eſt ipſi G, etiam F, æqualem eſſe ipſi H: Et denique ſi E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non eſſet, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſi earum æque multiplicia non ſemper ita ſe haberent. Dico jam, multiplicia primæ ac tertiæ non ſolum una deficere à multiplicibus ſecundæ ac quartæ, aut una æqualia eſſe, aut una excedere, ut diximus, ſed eandem quoque inter ſe proportionem habere, nimirum ita eſſe E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem ſecundæ B, ut F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc eſt ſi rurſus E, ſtatuatur prima magnitudo; G, ſecunda; F, tertia, & H, quarta; ſumanturque ipſarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipſarum G, H, quæcunque etiam æque multiplicia; Multiplicia ipſarum E, F, à multiplicibus ipſarum G, H, vel una deficere, vel una æqualia eſſe, vel una excedere, ut vult definitio 6. Idem namque eſt, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æque multiplicia ſumpta diximus, vel una deficere, vel una æqualia eſſe, vel una excedere. Capiantur enim rurſus I, K, ipſarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipſarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex eſt E, prima ipſius A, ſecundæ, quam F, tertia ipſius C, quartæ; ſumptæ ſunt autem & I, K, æque multiplices ipſarum E, F, primæ ac tertiæ; *b* Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipſarum A, C, ſecundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipſarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, ſecundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, oſtenſæque ſunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æque multiplices ſecundæ & quartæ B, D, *c* fit ut ſi I, multiplex primæ

b 3. *quint.*

c 6. *def. quinti.*

Digitized by Google

primæ deficit ab L, multiplici ſecundæ, etiam K, multiplex tertiæ neceſſario deficiat ab M, multiplici quartæ: & ſi I, æqualis eſt ipſi L, etiam K, ipſi M, ſit neceſſario æqualis: & denique ſi I, excedit ipſum L, etiam K, excedat neceſſario ipſum M: Idemque oſtendetur in quibuſcunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia ſemper hæc æque multiplicia, quæcunque ſint, *d* æque multiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cum I, & K, ſint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices ſecundæ G, & quartæ H; oſtenſumque ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex ſecundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque eſſe, quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione; *e* Erit, ut E, prima ad G, ſecundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 3. quint.

e 6. def. quinti.

COROLLARIUM.

Hinc facile demonſtrabitur inverſa ratio, quam Euclides defin. 13. explicavit; hoc eſt ſi quatuor magnitudines fuerint proportionales, eaſdem & contra, ſeu inverſa ratione proportionales eſſe. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico eſſe convertendo, ut B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æque multiplicibus ipſarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æque multiplicibus ipſarum B, D, ſecundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, ſecundam ſe habet, ut C, tertia ad D, quartam, *f* neceſſario ſequitur, ſi E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex ſecundæ, vel æqualis, vel major, etiam F, multiplicem tertiæ minorem eſſe, vel æqualem vel majorem, quam H, multiplicem quartæ; Perſpicuum eſt, ſi è contrario G, major fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, majorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, ſecundum quamcunque multiplicationem ſint ſumpta hæc æque multiplicia. Nam ſi utraque E, F, minor eſt, quam utraque G, H, erit contra utraque G, H, major quam utraque E, F, & ſi

TAB. XVIII. fig. 6.

f 6. def. quinti.

utraque

Digitized by Google

utraque E, F, æqualis eſt utrique G, H, erit è contrario, utraque G, H, utrique E, F, quoque æqualis: Et denique ſi utraque E, F, major eſt, quam utraque G, H, erit vice verſa, utraque G, H, minor, quam utraque E, F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, ſumpta ſunt, æque multiplicia G, H; Item ſecundæ A, & quartæ C, æque multiplicia E, F, oſtenſumque eſt, G, H, vel una excedere E, F, vel una æqualia eſſe vel una deficere, ſecundum quamcumque multiplicationem ea multiplicia ſumantur; *g* erit ut B, prima ad A, ſecundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonſtrandum. *g 6. def. quinti.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ; Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

ITa multiplex ſit tota AB, totius CD, ut eſt multiplex AE, ablata ablatæ CF, ſive AE, CF, ablatæ ſint totis AB, CD, commenſurabiles, ut in 7ma figura, ſive incommenſurabiles, ut in 8va figura. Item ſive AE, CF, compoſitæ ſint ex eiſdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, ut in 7ma figura, ſive non ex eiſdem, ut in 8va figura. Dico reliquam EB, ita eſſe multiplicem reliquæ FD, ut eſt tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cujuſpiam magnitudinis, videlicet ipſius GC, ut eſt AE, multiplex ipſius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque ſunt multiplices ipſarum CF, GC; *a* erit tota AB, totius GF, ita multiplex, ut AE, ipſius CF, hoc eſt omnes omnium, ut una unius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipſius CD, quam eſt multiplex AE, ipſius CF. Igitur AB, tam eſt multiplex ipſius GF, quam multiplex eſt ipſius CD; *b* atque idcirco æquales ſunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipſius FD, quam multiplex *TAB. XVIII. fig. 7, 8. a 1. quint. b 6. pron.*

Digitized by Google

tiplex eſt ipſius GC. Sed ita multiplex poſita fuit EB, ipſius GC, ut AE, ipſius CF, hoc eſt, ut tota AB, totius CD. Quare tam multiplex eſt reliqua EB, reliquæ FD, quam eſt tota AB, totius CD, quod eſt propoſitum.

TAB. XVIII. fig. 9, 10. Aliter. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, ut ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, eſſe ſic multiplicem, ut eſt tota totius. Poſita enim GA, ita multiplici ipſius FD, ut eſt AE, ipſius CF, vel ut tota AB, totius CD, quoniam AE, GA, æque multiplices ſunt ipſarum CF, FD; *c* erit tota GE, ſic multiplex totius CD, ut AE, ipſius CF: Sed ita quoque multiplex eſt AB, ejuſdem CD, ut AE, ipſius CF, ex hypotheſi. Æque multiplices ſunt igitur GE, AB, ipſius CD; *d* atque adeo inter ſe æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB, Ideoque æque multiplices ipſius FD; cum GA, ſit multiplex poſita ipſius FD: Atqui ita eſt multiplex poſita GA, ipſius FD, ut AB, ipſius CD. Igitur & EB, reliqua ſic erit multiplex ipſius FD, reliquæ ut AB, tota totius CD; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 1. quint.

d 6. pron.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

TAB. XVIII. fig. 11. SInt magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG,

Digitized by Google

AG, ejuſdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipſi E, vel ejus multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E. Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim, CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quam CH, tertia multiplex eſt quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartæ F; *a* erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, ut HI, tertia cum ſexta, multiplex eſt quartæ F: Atqui CD, ipſius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex eſt ipſius E. Æque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F. *b* Ideoque æquales inter ſe. Quare dempta CH, communi remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod eſt propoſitum. a 2. quint. b 6. pron.

Sit deinde GB, multiplex ipſius E. Dico ita quoque eſſe multiplicem HD, ipſius F. Poſita namque CI; ita multiplici ipſius F, ut eſt multiplex GB, ipſius E; *c* erit ut prius AB, ita multiplex ipſius E, ut HI, multiplex eſt ipſius F. *d* Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, eſt ita multiplex ipſius F, ut GB, ipſius E, multiplex eſt, ex hypotheſi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipſius F, quam GB, ipſius E, multiplex eſt, quod eſt propoſitum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, &c. Quod oſtendendum erat. *TAB. XVIII. fig. 12.* c 2. quint. d 6. pron.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SInt duæ magnitudines A, B, æquales inter ſe, & tertia quævis C. Dico A, & B, habere *TAB. XIX. fig. 1.*

Digitized by Google

bere eandem proportionem ad C. Item C, viciſſim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipſarum æqualium A, B; *a* eruntque D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, utcunque multiplex ipſius C. Quoniam igitur D, E, æquales ſunt, fit ut utraque vel minor ſit, quam F, vel æqualis, vel major, juxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ minores ſint ipſa F, multiplice ſecundæ & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel majores; *b* erit ea proportio primæ A, ad C, ſecundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

a 6. *prop.*

b 6. *def. quinti.*

Eodem pacto oſtendemus F, vel minorem eſſe utraque D, E, vel utrique æqualem, vel majorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat à D, & E, æque multiplicibus ſecundæ A, & quartæ B, vel una æqualis ſit, vel major; *c* Erit quoque ea proportio primæ C, ad ſecundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod eſt propoſitum. Poſſet brevius ſecunda hæc pars oſtendi per coroll. 4. propoſ. ex inverſa ratione. Cum enim oſtenſum jam ſit, eſſe A, ad C, ut B, ad C, erit convertendo C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. Quod erat demonſtrandum.

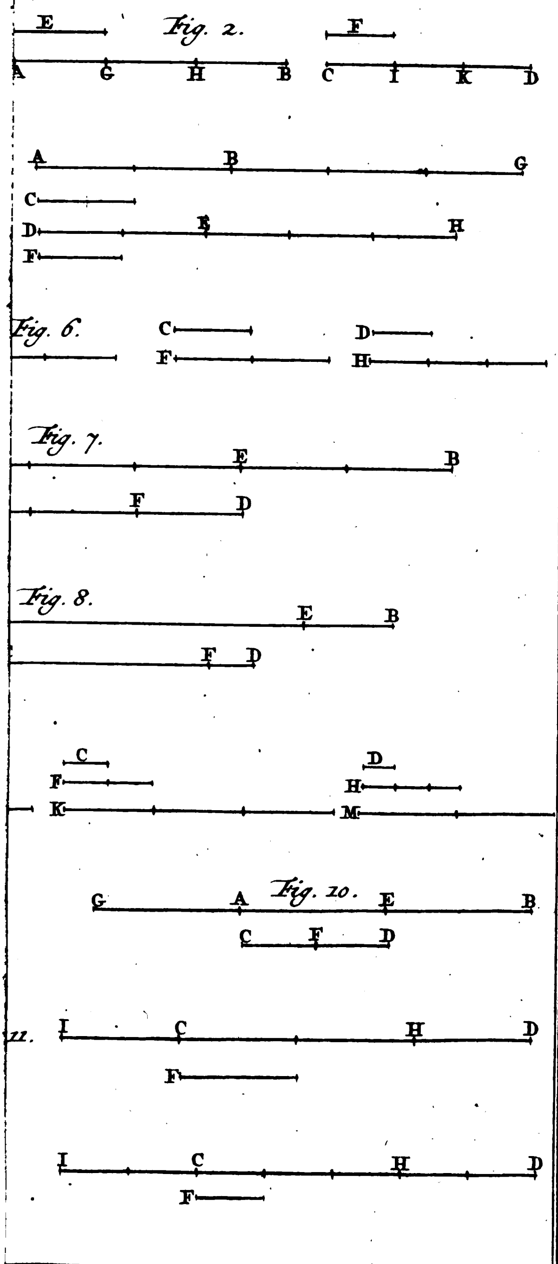
c 6. *def. quinti.*

SCHOLIUM.

Eodem fere modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, utitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quam C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipſarum

TAB. XIX. *fig.* 2.

TAB. XVIII.


Fig. 2.
E
F
A G H B
C I K D
A B G
C
D E H
F
Fig. 6.
C
D
F
H
Fig. 7.
E B
F D
Fig. 8.
E B
F D
C
D
F
H
K
M
Fig. 10.
G A E B
C F D
11.
I C H D
F
I C H D
F

Digitized by Google

ipſarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipſarum C, & D, ſecundæ & quartæ; d *erunt tam E, & F, inter ſe æquales, quam G, & H, inter ſe. Quare ſi E, multiplex primæ deficit à G, multiplice ſecundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ſuperat, ſuperabit.* e *Eadem ergo eſt proportio A, primæ ad C, ſecundam; quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod erat propoſitum.* d 6. pron. e 6. def. quinti.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, majorem rationem habet, quam ad majorem.

SInt magnitudines inæquales, AB, major & C, minor, tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, majorem eſſe proportione C, ad D. At è converſo, majorem eſſe proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine majore, magnitudo AE, æqualis minori C, ut ſit reliqua EB. Utraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut GF, multiplex ipſius EB, major quidem ſit, quam D; At HG, multiplex ipſius AE, non ſit minor eadem D, ſed vel major, vel æqualis. In 3tia figura neceſſe fuit ſumere GF, HG, triplas ipſarum EB, AE; quia dupla ipſius AE, eſſet minor, quam D. Loco triplarum potuiſſent accipi quæcunque aliæ æque multiplices majores. In 4ta autem figura ſatis eſt, ſumere ipſarum EB, AE, duplas GF, HG; quia utraque GF, HG, major eſt, quam D. Poſſent tamen pro duplis ſumi quæcunque aliæ majores æque multiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices ſunt duarum BE, EA; a erit & tota FH, ita multiplex totius AB, ut TAB. XIX. fig. 3. 4. a 1. quinti.

Digitized by Google

ut GH, ipſius AE, hoc eſt, ipſius C, cum æquales ſint poſitæ, C, & AE. Capiatur quoque ipſius D, multiplex IK, quæ proxime major ſit, quam HG, nempe dupla, ut in 3tia figura. Quod ſi dupla major non fuerit quam HG, ſumatur tripla, vel quadrupla, &c. In 4ta figura accepta eſt IK, ipſius D, quadrupla, quia tam dupla quam tripla minor eſt, quam HG, at quadrupla jam major eſt. Abſciſſa ergo LK, quæ æqualis ſit ipſi D, non erit IL, major quam HG, (alias IK, non eſſet multiplex ipſius D, proxime major quam HG; ſed & IL, major quoque eſſet quam GH. Quod ſi IK, dupla ſit ipſius D, perſpicuum eſt, IL, non eſſe majorem, quam HG, cum HG, poſita ſit non minor quam D, hoc eſt quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipſi IL, vel major. Et quia FG, major eſt poſita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, major quam LK. Cum ergo HG, non minor ſit quam IL, ut demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel major; erit tota FH, major quam IK. Itaque cum FH, HG, ſint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D, quæ inſtar eſt ſecundæ & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ, major quam IK, multiplex ſecundæ; At HG, multiplex tertiæ, non ſit major, quam IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius D, major quam HG,) *b* erit major proportio AB, primæ ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

b 8. *def. quinti.*

Quoniam vero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda & AB, quarta) major eſt quam HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, major non eſt, quam FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, major ſit, quam IK, ut oſtenſum eſt; *c* erit major proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium

c 8. *def. quinti.*

Digitized by Google

qualium igitur magnitudinum major ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales.

HAbeant primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, eſſe inter ſe æquales. Sit enim, ſi fieri poteſt, altera, nempe A, major & B, minor. *a* Erit igitur major proportio A, majoris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt A, & B, ſed æquales. *TAB.XIX fig. 5.* a 8. *quint.*

Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rurſus A, & B, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe A, eſſet major, & B, minor; *b* haberet C, ad B, minorem, majorem proportionem, quam ad A, majorem: quod eſt contra hypotheſin. Non igitur major erit A, quam B, ſed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonſtrandum erat. b 8. *quint.*

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major eſt: Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor eſt.

HAbeat primum A, ad C, majorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, majorem eſſe, quam B: Si enim A, foret ipſi B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor eſſet, quam B, *b* haberet B, major ad C, proportionem majorem, *TAB.XIX fig. 6.* a 7. *quint.* b 8. *quint.*

jorem, quam A, minor ad eandem C, quod eſt contra hypotheſin. Non eſt igitur A, æqualis vel minor quam B, ſed major.

Habeat ſecundo C, ad B, majorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem eſſe quam A. Non enim æqualis erit B, ipſi A; *c* alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod eſt contra hypotheſin. Neque vero B, major erit quam A, *d* alias haberet C, ad minorem A, majorem proportionem quam ad B, majorem: quod magis eſt contra hypotheſin. Minor igitur eſt B, quam A, quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 7. quint.

d 8. quint.

xi. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Quæ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

TAB. XIX. fig. 7.

SInt proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe, ſecundum definitionem 6. hoc eſt ſumptis æque multiplicibus ipſarum A, C; Item æque multiplicibus ipſarum B, D; ſemper contingere, ut multiplices ipſarum A, C, à multiplicibus ipſarum B, D, vel una deficiant, vel una æquales ſint, vel una excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam ut E, tertia ad F, quartam; *a* fit ut ſi G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel major, æqualis quoque ſit I, ipſi M, vel major: *b* Sed (ut eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt, quam M, vel æqualis, vel

a 6. def. quinti.

b 6. def. quinti.

vel major eſt quoque H, minor quam L, vel æqualis, vel major; propterea quod ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et ſi G, æqualis eſt, vel major quam K, etiam H, æqualis erit, vel major quam L. Idemque oſtendetur accidere in quibuſcunque aliis æque multiplicibus. *c* Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum. c 6. *def. quinti.*

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

Si ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

QUod in propoſ. 1. de proportione multiplici demonſtravit, oſtendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales hoc eſt, ſit A, ad B, ut C, ad D, & E, ad F. Dico ut eſt una antecedentium ad unam conſequentium, nimirum A, ad B, ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, *a* erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, ſimul ita multiplices, ut una unius, nempe ut G, ipſius A; & omnes K, L, M, ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipſius B. Quoniam vero ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut alia E, tertia ad *TAB. XIX. fig.* 8. a 1. *quint.*

b 6. def. quinti. aliam F, quartam; *b* ſit ut ſi G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel major, æqualis quoque ſit H, ipſi L, & I, ipſi M, vel major. Ac proinde ſi G, minor eſt, vel æqualis, vel major quam K, & omnes G, H, I, ſimul omnibus K, L, M, ſimul minores ſint, c 6. def. quinti. vel æquales vel majores. *c* Quocirca ut eſt A, prima ad B, ſecundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si ſint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

xiij. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam majorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

TAB. XIX. fig. 9. SIt prima A, ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam major, quam E, quintæ ad F, ſextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe majorem quam E, quintæ ad F, ſextam, ſecundum definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æque multiplicibus ipſarum A, E; Item æque multiplicibus ipſarum B, F, contingere poſſe, ut multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B; at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, a 6. def. quinti. quartam; *a* ſit ut ſi G, multiplex primæ excesſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c.

&c. At quando H, excedit ipſam L, *b* non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor; quod major ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. *c* Major eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quamobrem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat. b 8. *def. quinti.* c 8. *def. quinti.*

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia major fuerit, erit & ſecunda major quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ; erit & ſecunda æqualis quartæ. Si vero minor, & minor erit.

Sit enim A, prima ad B, ſecundam ut C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, major fuerit quam C, fore quoque B, majorem quam D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque eſſe B, ipſa D. Sit primum A, major quam C, *a* eritque propterea proportio A, majoris ad B, major quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam ut A, tertia ad B, quartam, proportio autem A, tertiæ ad B, quartam major eſt, ut oſtendimus, quam C, quintæ ad B, ſextam: *b* Major quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam. *c* Minor eſt ergo D, quam B; Ideoque B, major erit quam D. Quod eſt propoſitum. TAB. XIX *fig.* 10, 11, 12. *fig.* 10. a 8. *quint.* b 13. *quint.* c 10 *quint.*

Sit deinde A, æqualis ipſi C; *d* eritque idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, *e* erunt quoque inter ſe eædem *fig.* 11. d 7. *quint.* e 11. *quint.*

f 9. quint. proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoque æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitum.

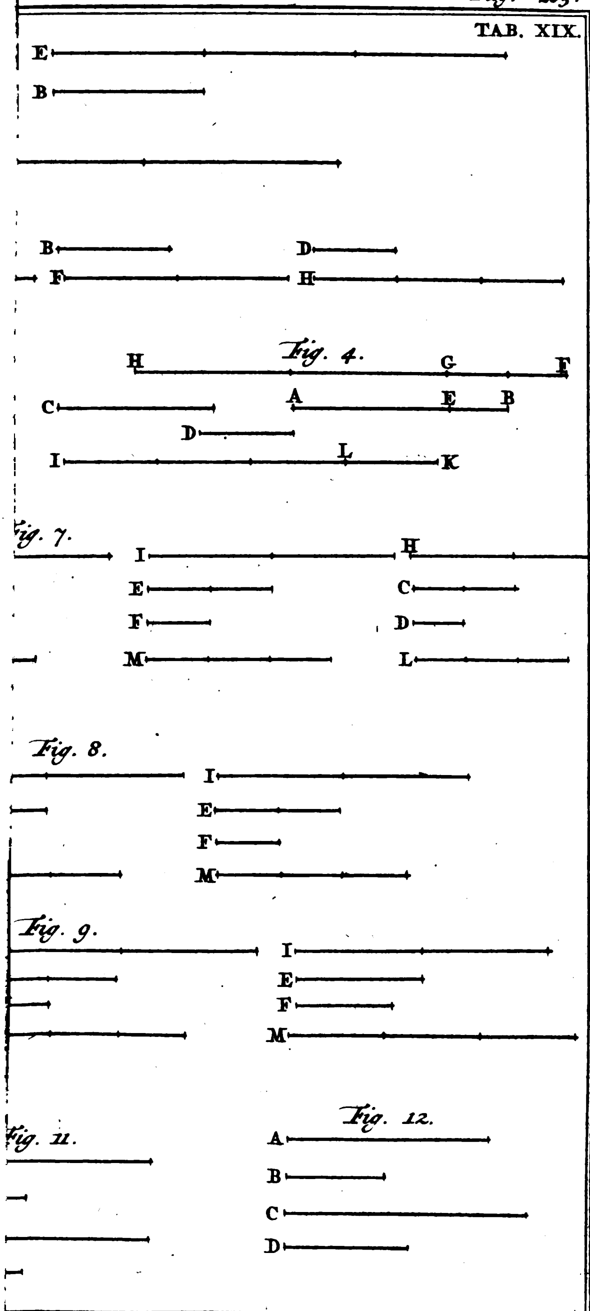
fig. 12. Sit tertio A, minor quam C, *g* eritque ob g 8. quint. hoc major proportio C, majoris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam; h 13. quint. *h* Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam; i 10. quint. *i* Ideoque B, minor erit, quam D, quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur.

TAB. XX. fig. 1. Sint partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita eſſe CD, ad EF, ut A, ad B. Cum enim CD, & EF, ſint æque multiplices ipſarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Dividatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipſi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipſi B, a 7. quint. *a* eritque CG, ad EI, ut A, ad B, quod CG, & A, æquales inter ſe ſint, nec non EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad b 11. quint. KF, ut A, ad B, *b* ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca ut CG, ad EI, hoc eſt, ut A, ad B, c 12. quint. *c* ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, ſimul ad omnes EI, IK, KF, ſimul, quod eſt propoſitum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.



Digitized by Google

Digitized by Google

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvi.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

Hic demonſtratur alterna, ſive permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico viciſſim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ ac ſecundæ, æque multiplices E, F. Item ipſarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; *a* eritque E, ad F, ut A, ad B, cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipſæ *b* inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; *c* erunt & ipſæ eædem inter ſe; hoc eſt, ut eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. *d* Quare ſi E, prima major eſt quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda major quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta ſint æque multiplicia E, F, & æque multiplicia G, H. *e* Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, vel una æquales ſint, vel una excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.

TAB. XX. fig. 2.
a 15. *quint.*
b 11. *quint.*
c 11. *quint.*
d 14. *quint.*
e 6. *def. quinti.*

THEOR.

xvij. THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diviſæ proportionales erunt.

TAB.XX. fig. 3. HOc loco demonſtrat Euclides Diviſionem rationis, quam defin. 15. explicavit. Sint enim compoſitæ magnitudines AB, CB, & DE, EF, proportionales, hoc eſt, ſit AB, ad CB, ut DE, ad EF. Dico & diviſas eaſdem proportionales eſſe, hoc eſt, ut eſt AC, ad CB, ita eſſe DF, ad FE, in eo ſenſu, quem definitione 6. expoſuimus. Ipſarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; *a* eritque GI, ita multiplex ipſius AB, ut eſt GH, ipſius AC, hoc eſt, ut KL, ipſius DF, *b* ita quoque multiplex eſt KM, ipſius DE. Æque multiplices ergo ſunt GI, KM, ipſarum AB, DE. Capiantur rurſus IN, MO, æque multiplices ipſarum CB, FE. Quoniam igitur ſic eſt multiplex HI, prima ſecundæ CB, ut LM, tertia quartæ FE: Item tam eſt multiplex IN, quinta ſecundæ CB, quam multiplex eſt MO, ſexta quartæ FE; *c* erit & HN, ſic multiplex ſecundæ CB, ut LO, multiplex eſt quartæ FE. Itaque cum ſit AB, prima ad CB, ſecundam, ut DE, tertia ad FE, quartam; ſumptæque ſint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item ſecundæ & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO, *d* ſit ut ſi GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice ſecundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, ablatis communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et ſi GI, æqualis fuerit ipſi HN, & KM, ipſi LO, ablatis com-

a 1. *quint.*
b 1. *quint.*
c 2. *quint.*
d 6. *def. quinti.*

communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipſi IN, & KL, ipſi MO. Et ſi denique GI, exceſſerit ipſam HN, & KM, ipſam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipſam IN, & KL, ipſam MO. Quam ob rem cum GH, KL, ſumptæ ſint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF: Item IN, MO, æque multiplices ſecundæ CB, & quartæ FE, oſtenſumque ſit, (in quacunque multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel una deficere, vel una æquales eſſe, vel una excedere; *e* Erit AC, prima ad CB, ſecundam, ut DF, tertia ad FE, quartam, quod eſt propoſitum. Si compoſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat. *e 6. déf. quint.*

THEOR. 18. PROPOS. 18. xviij.

Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

DEmonſtrat hoc loco Euclides compoſitionem rationis, quam definitione 14. deſcripſit. Sint enim diviſæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc eſt, AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico & compoſitas proportionales eſſe, hoc eſt, ut eſt AC, ad BC, ita eſſe DF, ad EF. Si enim non eſt, ut AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipſa EF, vel majorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipſa EF, ſi fieri poteſt, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt, ut AC, ad BC, ita DF, ad GF; *a* Erit dividendo quoque, ut AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed ut AB, ad BC, ita propoſita quoque eſt DE, ad EF. *b* Igitur erit etiam, ut DG, prima ad GF, ſecundam, ita DE, tertia *TAB. XX. fig. 4.* *a 17. quint.* *b 11. quint.*

ad

Digitized by Google

ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima major
c14. quint. ſit, quam DE, tertia, c erit quoque GF, ſecunda major quam EF, quarta, pars quam totum. Quod eſt abſurdum.

Habeat deinde, ſi fieri poteſt, DF, ad HF, majorem ipſa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur eſt, ut AC, ad
d17. quint. BC, ita DF, ad HF; d erit dividendo quoque ut AB, ad BC, ita DH, ad HF. *Sed ut AB, ad BC,
e 11. quint. ita poſita etiam eſt DE, ad EF. e Igitur erit quoque, ut DH, prima ad HF, ſecundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor ſit quam DE, tertia, eritque HF, ſecunda minor quam EF, quarta, totum quam pars, quod eſt abſurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipſa EF, aut ad majorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipſam EF, erit, ut AC, ad BC, quod eſt propoſitum. Itaque ſi diviſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

xix. THEOR. 19. PROPOS. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum, ad reliquum, ut totum ad totum, ſe habebit.

TAB. XX. fig. 5. QUod in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Si enim tota AB, ad totam CD, ut ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, eſſe ad reliquam FD, ut eſt tota AB, ad totam CD. Cum
a16. quint. enim ſit AB, ad CD, ut AE, ad CF, a erit &
b17. quint. permutando AB, ad AE, ut CD, ad CF. b Dividendo ergo erit EB, ad AE, ut FD, ad CF,
c16. quint. c Quare permutando rurſus erit EB, ad FD, ut AE, ad CF, hoc eſt, ut tota AB, ad totam CD, cum poſita ſit AB, ad CD, ut AE, ad CF.

Digitized by Google

Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIUM.

Hinc facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur à converſione rationis, juxta 16. defin.

Sit enim, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per converſionem rationis eſſe quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, *d* erit quoque dividendo, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & convertendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF, *e* ac propterea componendo quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum. *TAB XX. fig. 6.* *d 17. quint.* *e 18. quint.*

THEOR. 20. PROPOS. 20. XX.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero; quæ binæ & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autem prima, quam tertia major fuerit, erit & quarta quam ſexta, major. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, ſitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F, ſit autem primum A, prima major quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe majorem F, ſexta. Cum enim A, major ſit quam C, *a* erit major proportio A, ad B, quam C, ad B. Eſt autem ut A, ad B, ita D, ad E. *b* Major igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At ut C, ad B, ita eſt F, ad E. (Cum enim ſit B, ad C, ut E, ad F, erit convertendo ut C, ad B, ita F, *TAB. XX. fig. 7.* *a 8. quint.* *b 13. quint.*

F, ad E.) Major igitur quoque proportio erit
c 10. quint. D, ad E, quam F, ad E, *c* quare D, major
erit, quam F. Quod eſt propoſitum.

TAB XX fig. 8 Sit deinde A, æqualis ipſi C. Dico & D, æqualem eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C,
d 7. quint. æqualis *d* erit A, ad B, ut C, ad B. Eſt autem
e 11. quint ut A, ad B, ita D, ad E. *e* Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B: At ut C, ad B, ita eſt F, ad E, per inverſam rationem, uti prius. Quare
f 9. quint. erit quoque D, ad E, ut F, ad E: *f* Ideoque æquales erunt D, & F. Quod eſt propoſitum.

TAB. XX. fig 9 Sit tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem eſſe, quam F. Cum enim A, minor ſit
g 8. quint. quam C, *g* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed ut A, ad B, ita eſt D, ad E.
h 13. quint. *h* Minor ergo quoque proportio eſt D, ad E, quam C, ad B. Eſt autem convertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor eſt quoque proportio D, ad E, quam F, ad E,
i 10. quint. *i* proptereaque D, minor erit quam F. Quod eſt propoſitum. Si ſint itaque tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod erat oſtendendum.

XXI. THEOR. 21. PROPOS. 21.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia major fuerit: erit & quarta, quam ſexta, major. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; ſin illa minor; hæc quoque minor erit.

TAB XX. fig. 10. SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur; ſitque earum proportio perturbata, hoc eſt, ſit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, primo major quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe

majo-

Digitized by Google

majorem ſexta, F. Cum enim A, major ſit quam C, *a* erit major proportio A, ad B, quam C, ad B: Eſt autem ut A, ad B, ita E, ad F. *b* Major ergo quoque proportio eſt E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero ut B, ad C, ita eſt D, ad E, erit convertendo ut C, ad B, ita E, ad D. Quare major quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. *c* Ideoque major erit D, quam F. Quod eſt propoſitum. a 8. *quint.* b 13. *quint.* c 10. *quint.*

Sit deinde A, ipſi C, æqualis. Dico D, quoque ipſi F, eſſe æqualem. Cum enim A, ſit æqualis ipſi C, *d* erit A, ad B, ut C, ad B: Sed ut A, ad B, ita eſt E, ad F. *e* Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F: Eſt autem ex inverſa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque ut E, ad F, ita E, ad D; *f* atque idcirco D, ipſi F, æqualis erit. Quod eſt propoſitum. *TAB. XX. fig.* 11. d 7. *quint.* e 11. *quint.* f 9. *quint.*

Sit tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem eſſe quam F. Cum enim A, ſit minor quam C, *g* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Ut autem A, ad B, ita eſt E, ad F. *h* Minor eſt ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, ut ante, ex inverſa ratione, eſt ut C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; *i* ac propterea D, minor erit quam F, quod eſt propoſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod oſtendendum erat. *TAB. XX. fig.* 12. g 8. *quint.* h 13. *quint.* i 10. *quint.*

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxiij.

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAm hic demonſtrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando

Digitized by Google

proportio eſt ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: ſitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, ut D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, D, æque multiplicibus G, H: Item ipſarum B, E, æque multiplicibus I, K: Item ipſarum C, F, æque multiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, ut D, tertia ad E, quartam, *a* erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem ſecundæ B, ut H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecundam, ut E, tertia ad F, quartam; *b* erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem ſecundæ C, ut K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur; *c* fit ut ſi G, prima ſuperat tertiam L, ſuperet neceſſario quoque H, quarta ſextam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant una ab L, M, æque multiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel una æquales ſint, vel una excedant: in quacunque multiplicatione ſumpta ſint ea multiplicia: *d* erit A, prima ad C, ſecundam, ut D, tertia ad F, quartam. Quod eſt propoſitum.

TAB.XXI fig. 1.

a 4. quint.

b 4. quint.

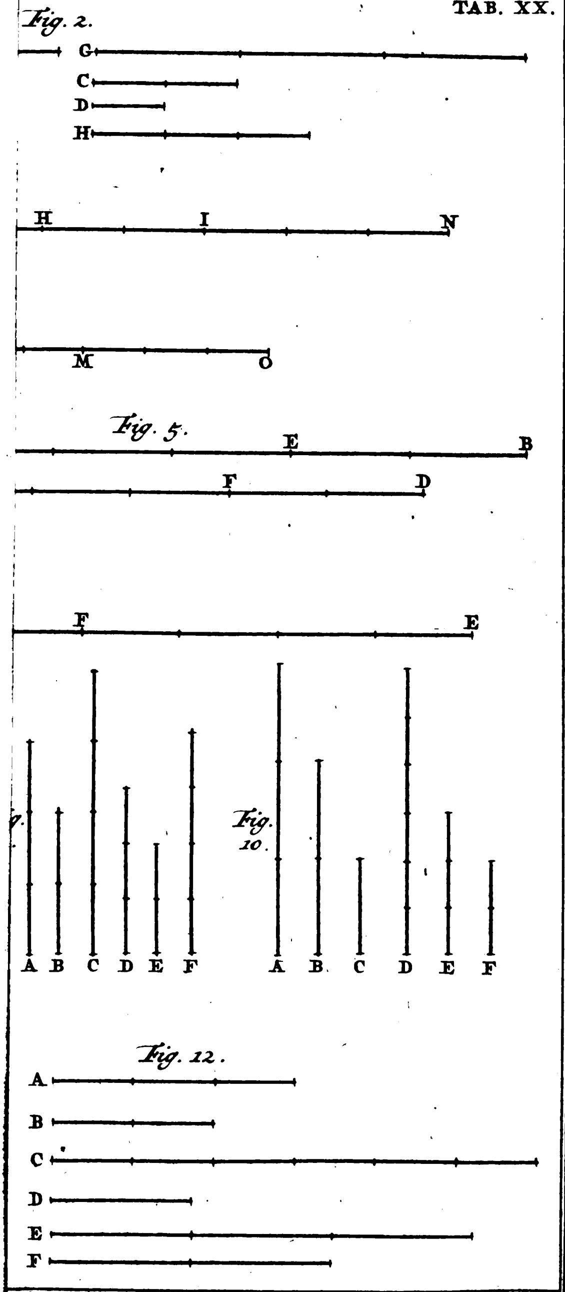
c 10. quint.

d 6. def. quinti.

Deinde ſint plures magnitudines tribus, ita ut ſit etiam C, ad N, ut F, ad O. Dico adhuc eſſe ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim jam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, ut D, ad F: ponatur autem C, ad N, ut F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, rurſus erit, ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; ſicut id in quatuor demonſtratum fuit per tres; Et ſic de plurī-

Digitized by Google

TAB. XX.


Fig. 2.
G
C
D
H
H
I
N
M
O
Fig. 5.
E
B
F
D
F
E
Fig. 10.
A B C D E F
A B C D E F
Fig. 12.
A
B
C
D
E
F

pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 23. xxiij.

Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonſtratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit ut A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate eſſe ut A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item ipſarum C, E, F, æque multiplicibus K, L, M. *a* Erit ut A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, ſint ipſarum A, B, æque multiplices: At ut A, ad B, ita eſt E, ad F; *b* Igitur ut G, ad H, ita quoque eſt E, ad F; *c* Sed ut E, ad F, ita eſt quoque L, ad M, quod L, M, ſint ipſarum E, F, æque multiplices. *d* Igitur erit quoque ut G, ad H, ita L, ad M. Rurſus quoniam eſt B, prima ad C, ſecundam, ut D, tertia ad E, quartam; *e* erit quoque, ut H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem ſecundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur ſunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, eſtque earum proportio perturbata; cum oſtenſum ſit eſſe ut G, ad H, ita L, ad M: Et ut H, ad K, ita I, ad L; *f* ſit ut ſi G, prima ſuperat tertiam K, ſuperet quoque quarta I, ſextam M; & ſi æqualis, æqualis, & ſi deficit deficiat. Itaque cum G, & I, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æque

TAB. XXI fig. 2.
a 15. *quint.*
b 11. *quint.*
c 15. *quint.*
d 11. *quint.*
e 4. *quint.*
f 21. *quint.*

multiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel una deficiant, vel una æquales ſint, vel una exce-
g 6. def. quinti. dant; *g* erit ut A, prima ad C, ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod eſt propoſitum. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod demonſtrandum erat.

xxiv. THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

QUod propoſitione 2. demonſtravit Euclides de ſola proportione multiplici, demonſtrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit
TAB. XXI. fig. 3. enim AB, prima ad C, ſecundam, ut DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, ſecundam, ut EH, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe AG, compoſitam ex prima ac quinta, ad ſecundam C, ut eſt DH, compoſita ex tertia & ſexta, ad quartam F. Cum enim ſit ut BG, ad C, ita EH, ad F, erit convertendo ut C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt AB, ad C, ut DE, ad F, & C, ad BG, ut F, ad
a 22. quint. EH, *a* erit ex æqualitate AB, ad BG, ut DE, ad
b 18. quint. EH. *b* Componendo igitur erit ut tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit AG, ad BG, ut DH, ad EH, & BG, ad C,
c 22. quint. ut EH, ad F: *c* erit ex æqualitate AG, ad C, ut DH, ad F. Quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 25. xxv.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

SIt enim AB, ad CD, ut E, ad F, ſitque AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, ſimul eſſe majores duabus CD, & E, ſimul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipſi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipſi F. Erit igitur AG, ad CH, ut E, ad F, hoc eſt, ut AB, ad CD. Quare cum ſit tota AB, ad totam CD, ut ablata AG, ad ablatam CH; *a* erit quoque ut tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Eſt autem AB, (cum ſit omnium maxima) major, quam CD. Igitur & GB, major erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales ſunt; ſi ipſis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipſi AG, & CH, ipſi E, fient AG, & F, ſimul æquales ipſis E, & CH, ſimul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, ſimul majores quam E, & CD, ſimul, cum GB, ſit major quam HD. Quod eſt propoſitum, Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

TAB.XXI. fig. 4.

a 19. *quint.*

SCHOLIUM.

Hic finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alii adjiciunt alias quaſdam propoſitiones, quibus ſæpenumero graviſſimi Scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Joannes Regiomontanus, & alii utuntur, eaſque quaſi eſſent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri poteſt, brevitate demonſtrare, nec non in numerum, ac ſeriem propoſitionum

Digitized by Google

tionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc eſt.

xxvi. [THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si prima ad ſecundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit convertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

TAB. XXI. fig. 5. Habeat enim A, ad B, majorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, ut C, ad D; eritque proportio A, ad B, major quoque quam E, ad B, *a* ac propterea A, major erit quam E. *b* Quare minor erit proportio B, ad A, majorem, quam B, ad E, minorem: Sed ut eſt B, ad E, ita eſt convertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor eſt quoque, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.]

a 10. *quint.* b 8. *quint.*

xxvij. [THEOR. 27. PROPOS. 27.

Si prima ad ſecundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam majorem proportionem; quam ſecunda ad quartam.

TAB. XXI. fig. 5. HAbeat enim A, ad B, majorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando majorem eſſe quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque eſſe E, ad B, ut C, ad D, eritque proportio A, ad B, major etiam quam E, ad B: *a* Ideoque A, major erit quam E. *b* Quare major erit proportio A,

a 10. *quint* b 8. *quint.*

Digitized by Google

A, ad C, quam E, ad C. *c* Quoniam vero permutando eſt, ut E, ad C, ita B, ad D, (cum poſita ſit E, ad B, ut C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, major quoque erit quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.] c16.*quint.*

[THEOR. 28. PROPOS. 28. xxviij.

Si prima ad ſecundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam majorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

SIt major proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo majorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC, ut DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, major quoque, quam GB, ad BC; *a* Ideoque AB, major quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, major quam GC; *b* majorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, *c* ut eſt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF, (quod poſita ſit GB, ad BC, ut DE, ad EF.) Major ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.] *TAB.XXI. fig.* 6. a10 *quint.* b8. *quint.* c18.*quint.*

[THEOR. 29. PROPOS. 29. xxix.

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam majorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque dividendo prima ad ſecundam majorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIt major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & dividendo majorem eſſe pro- *TAB.XXI. fig.* 6.

portionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim eſſe GC, ad BC, ut DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, major quoque
a 10. quint. proportione GC, ad BC: *a* ideoque major erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC;
b 8. quint. major erit AB, quam GB: *b* Ac propterea major erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC.
c 17. quint. *c* Sed dividendo, ut eſt GB, ad BC, ita eſt DE, ad EF. (Poſita namque eſt GC, ad BC, ut DF, ad EF.) Igitur major quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod eſt propoſitum.]

XXX. [THEOR. 30. PROPOS. 30.

Si compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam habuerit majorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per converſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

TAB. XXI. fig. 7. SIt major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per converſionem rationis, minorem eſſe proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim ſit AC, ad BC, major proportio, quam DF, ad EF;
a 29. quint. *a* erit & dividendo, major proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF.
b 26. quint. *b* Quare convertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE;
c 28. quint. *c* Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.]

THEOR.

Digitized by Google

[THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxi.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque major proportio primæ primorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam major, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque major proportio A, ad B, quam D, ad E: Item major B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate majorem quoque eſſe A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, ut E, ad F, eritque propterea proportio B, ad C, major, quam G, ad C; *a* Ideoque B, major erit quam G. Quare *b* major erit proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, majorem: Ponitur autem proportio A, ad B, major quam D, ad E. Multo ergo major erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, ut D, ad E; eritque propterea major proportio A, ad G, quam H, ad G; *c* Ideoque A, major erit, quam H. *d* Quare major quantitas A, ad C, habebit majorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: *e* Atqui ut H, ad C, ita eſt, ex æqualitate D, ad F. (quoniam ut D, ad E, ita eſt H, ad G; & ut E, ad F, ita G, ad C.) Major ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.]

TAB. XXI. *fig.* 8.
a 10. *quint.*
b 8. *quint.*
c 10. *quint.*
d 8. *quint.*
e 22. *quint.*

Digitized by Google

xxxij. [THEOR. 32. PROPOS. 32.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque major proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam major, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

TAB. XXI. fig. 9. Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque major proportio A, ad B, quam E, ad F. Item major B, ad C, quam D, ad E. Dico eſſe quoque majorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, ut D, ad E, eritque propterea proportio B, ad C, major

a 10. quint. quam G, ad C. *a* Ideoque major erit B, quam

b 8. quint. G. *b* Quare major erit proportio A, ad G, minorem, quam ejuſdem A, ad B, majorem; Eſt autem proportio A, ad B, major quam E, ad F. Multo ergo major eſt proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, ut E, ad F; Eritque propterea major pro-

c 10. quint. portio A, ad G, quam H, ad G; *c* ideoque ma-

d 8. quint. jor erit A, quam H. *d* Quocirca A, major ad C, majorem habebit proportionem, quam H,

e 23. quint. minor ad eandem C: *e* At ut H, ad C, ita eſt ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita eſt G, ad C, & ut E, ad F, ita eſt H, ad G.) Major ergo etiam eſt proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.]

THEOR.

Fig. 3.

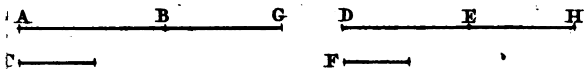


Fig. 4.

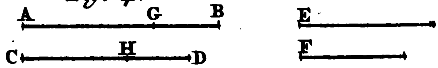
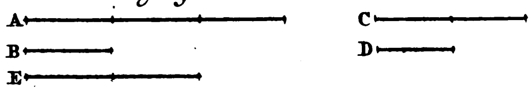


Fig. 5.



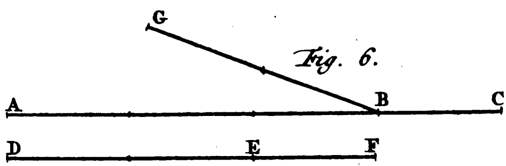


Fig. 7.



Fig. 8.

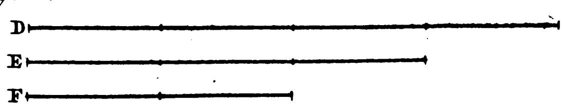
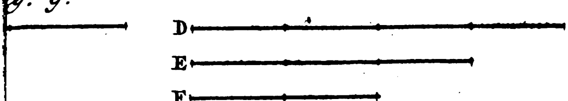


Fig. 9.



Digitized by Google

Digitized by Google

[THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxiij.

Si fuerit major proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum major proportio, quam totius ad totum.

SIt major proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, majorem eſſe, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim major ſit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; *a* erit quoque permutando, major proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; *b* ac propterea, per converſionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD. *c* Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc eſt, EB, reliqua ad reliquam FD, majorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod eſt propoſitum.]

TAB. XXII. *fig.* 1.

a 27. *quint.* *b* 30. *quint.* *c* 27. *quint.*

[THEOR. 34. PROPOS. 34. xxxiv.

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque major proportio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam; & hæc major, quam tertiæ ad tertiam; & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, majorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam poſteriorum, majorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam poſteriorum.

SInt primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F. Sit autem major propor-

TAB. XXII. *fig.* 2.

tio

tio A, ad D; quam B, ad E; Item major B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipſarum A, B, C, ſimul ad ipſas D, E, F, ſimul majorem eſſe proportione ipſarum B, C, ſimul ad ipſas E, F, ſimul; minorem vero, proportione A, ad D; majorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim major ſit proportio
a 27. quint. A, ad D, quam B, ad E; *a* erit permutando
b 28. quint. major A, ad B, quam D, ad E. *b* Igitur componendo, major erit proportio ipſarum A, B, ſimul ad B, quam ipſarum D, E, ſimul ad E;
c 27. quint. *c* Permutando ergo rurſus, major erit proportio A, B, ſimul ac D, E, ſimul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, majorem habeat proportionem, quam ablata B, ad
d 33. quint. ablatam E; *d* habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, majorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, major erit proportio, B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo major erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F.
e 27. quint. *e* Permutamdo igitur, major erit proportio A, ad
f 28. quint. B, C, quam D, ad E, F; *f* & componendo ergo major eſt proportio totius A, B, C, ad B,
g 27. quint. C, quam totius D, E, F, ad E, F, *g* Et rurſus permutando major proportio omnium A, B, C, ſimul ad omnes D, E, F, ſimul quam B, C, ad E, F, quod eſt primum.

Itaque cum ſit major proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablatæ B, C, ad abla-
h 33. quint. tam E, F, *h* erit & major proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod eſt ſecundum.

Quoniam vero major eſt proportio B, ad E,
i 27. quint. quam C, ad F; *i* erit permutando major quoque
k 28. quint. B, ad C, quam E, ad F; *k* & componendo, major totius B, C, ad C, quam totius E, F,
l 27. quint. ad F, *l* & rurſus permutando, major B, C, ad E, F, quam C, ad F. Eſt autem major proportio A, B, C, ad D, E, F, ut oſtendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo major erit pro-

proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam ultimæ C, ad ultimam F, quod eſt tertium.

Deinde ſint quatuor magnitudines utrobique cum eadem hypotheſi, hoc eſt, ſit quoque major proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem conſequi. Ut enim jam in tribus eſt oſtenſum, major eſt proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo major erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. *m* Permutando ergo major erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, *n* & componendo major A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H, *o* & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, major quam B, C, G, ad E, F, H, quod eſt primum.

TAB. XXII. fig. 3.

m 27. quint.

n 18. quint.

o 27. quint.

Itaque cum ſit major proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, *p* erit & reliquæ A, ad reliquam D, major proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod eſt ſecundum.

p 33. quint.

Quoniam vero, ut in tribus eſt demonſtratum, major eſt proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & major A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, ut fuit oſtenſum; multo major erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam ultimæ G, ad ultimam H; quod eſt tertium.

Eadem arte concludes, eadem conſequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in ſex per quinque, & in ſeptem, per ſex, &c. quemadmodum oſtendimus in quatuor, per tres. Conſtat ergo totum Theorema, &c.]

EUCLI-

Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTUM SEXTUM.

DEFINITIO. I.

Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

TAB. XXII. fig. 4. *UT triangula ABC, DEF, ſimilia dicentur ſi fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipſi E; & C, ipſi F, æqualis ſit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF; & ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, & ut AC, ad CB, ita DF, ad FE.*

Quod ſi anguli unius æquales fuerint angulis alterius, ſinguli ſingulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ ſimiles: Ex quibus conſtat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, eſſe ſimiles, quanquam inter ſe maxime ſint inæquales. TAB. XXII. fig. 5. *Cujuſmodi ſunt triangula æquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim æqualitatem, erit GH, ad GI,*

Digitized by Google

GI, ut KL, ad KM. Item GH, ad HI, ut KL, ad LM, & GI, ad IH, ut KM, ad ML, cum ſemper ſit proportio æqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

DEFINITIO. II.

Reciprocæ autem figuræ ſunt, cum in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

UT ſi in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, ut utrobique ſit & antecedens, & conſequens diverſarum proportionum, hoc eſt, ut ſit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC, ſeu eadem AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (utroque enim modo AB, eſt antecedens unius proportionis & BC, conſequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, eſt conſequens unius, & FG, antecedens alterius; vel ſecundo modo FG, conſequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur hujuſmodi parallelogramma reciproca, quamvis ſimilia non ſint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, reciproca, ſi fuerit ut IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel ut IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me inveniſſe apud Geometras uſum reciprocarum figurarum in aliis figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis.

TAB. XXII. fig. 6.

TAB. XXII. fig. 7.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO. III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cum ut tota ad majus ſegmentum, ita majus ad minus ſe habuerit.

TAB. XXII. fig. 8. *SI linea recta quævis AB, ita dividatur in C, inæqualiter, ut ſit, quemadmodum tota AB, ad majus ſegmentum AC, ita AC, majus ſegmentum ad CB, minus ſegmentum; dicetur diviſa eſſe ſecundum extremam, & mediam rationem.*

DEFINITIO. IV.

Altitudo cujuſque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſin deducta.

TAB. XXII. fig. 9. *SI à vertice A, trianguli ABC, ad baſin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita ut tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta eſt perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D, vertice trianguli DEF, ad baſin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaque ſi duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad baſes (ſive hæ protractæ ſint, ſive non) demiſſæ, fuerint æquales, eandem dicentur hujuſmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem hujuſmodi perpendiculares erunt æquales, cum baſes figurarum, ac vertices in eiſdem conſtituti fuerint parallelis, cujuſmodi ſunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eiſdem parallelis conſtitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG,*

DHG, interni ex eadem parte ſint duobus rectis æquales, immo duo recti; a *erunt rectæ AG, DH,* a 28. primi
parallelæ; Sunt autem & AD, GH, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eiſdem eſſe parallelis conſtituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG; b *ac propterea latera oppoſita AG, DH, æqualia* b 34. primi
erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod ſi in eiſdem triangulis vertices ponantur C, & F, baſes vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad Baſin DE, protractam æqualis non eſt perpendiculari ex C, ad baſin AB, deductæ, cum nec triangula ipſa in eiſdem parallelis poſſint conſtitui; ut manifeſtum eſt.

Recte vero ab Euclide altitudo figuræ cujuſvis definita eſt per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad baſin deducitur: quoniam, ut ſcribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimenſione, menſura cujuſcunque rei debet eſſe ſtata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, ſicut & vulgus, omnia metiuntur, ſola linea perpendicularis certa eſt, determinataque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminatæque.

DEFINITIO. V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QUoniam denominator cujuslibet proportionis exprimit, quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem; (ut denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. oſtendit, in quavis proportione qua-

drupla antecedentem magnitudinem quater continere conſequentem; denominator vero proportionis ſubquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem eſſe partem quartam conſequentis, &c.) dici ſolet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; ut idem ſignificet quantitas alicujus proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, ſeu quantitates inter ſe multiplicatæ effecerint illam proportionem, ſeu (ut vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, ſive denominatorem. Ut proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & ſextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem ſextuplæ, hoc eſt, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter ſe multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

Porro quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad ultimam componi dicitur ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermediis conſtet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, ut quinto libro defin. 10. expoſuimus: ita ut ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad ultimam duplicata proportionis primæ ad ſecundam; ſi tres, triplicata, &c. Sic etiam

etiam in magnitudinibus quibuſcunque ordine poſitis, proportio primæ ad ultimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad ultimam conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis.

DEFINITIO. VI.

[Parallelogrammum ſecundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat majorem lineam, quam ſit ea, ſecundum quam applicatur: ita tamen, ut parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, conſtituatque cum eo totum unum parallelogrammum.]

Sit data recta linea AB, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, ſed deſit CB; & ducta BF, parallela ipſi CD, donec cum ED, protracta conveniat in F, compleatur totum parallelogrammum ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum ſecundùm rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita ut DB, appelletur defectus. TAB. XXII. fig. 10.

Rurſus ſit data recta linea AC, ſupra quam conſtituantur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, majus recta data AC; & ducatur CD, ipſi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum ſecundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita ut DB, vocetur exceſſus.

Digitized by Google

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, ut baſes.

TAB. XXII. fig. 11. SInt duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum baſes BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, ejuſdem altitudinis, quorum eædem baſes BC, EF. Dico ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, ut eſt baſis BC, ad baſin EF. Hoc eſt, ſi baſis BC, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis EF, ſecunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æque multiplicia primæ ac tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel una deficere, vel una æqualia eſſe, vel una excedere, ut definitio 6. libr. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter eaſdem parallelas GH, LN, (Nam ut in defin. 4. dictum eſt, triangula ac parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas, ſic enim perpendiculares à verticibus ad baſes demiſſæ æquales erunt,) & ex BL, ſumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipſi BC, æquales; Item ex FN, abſcindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, *a 38. primi* AL; DM, DN, *a* erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex eſt ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex eſt recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in

tot

Digitized by Google

tot triangula æqualia ſunt diviſa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN, *b* neceſſario triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac proinde ſi CL, major fuerit quam EN, neceſſario ACL, majus eſt quam DEN, & ſi minor, minus; deficient propterea una CL, recta, & triangulum ACL, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta & triangulo DEN, æque multiplicibus ſecundæ EF, & quartæ DEF, vel una æqualia erunt, vel una excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. *a* Quare quæ proportio eſt primæ BC, ad ſecundam EF, baſis ad baſim, ea eſt tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita eſt triangulum ad triangulum. Quod eſt propoſitum. b 38. *primi* a 6. *def. quinti.*

Quoniam autem *b* ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt parallelogrammum CG, (*c* quod duplum eſt trianguli ABC,) ad parallelogrammum EH; (*d* quod eſt duplum trianguli DEF,) perſpicuum eſt, *e* ita quoque eſſe parallelogrammum ad parallelogrammum, ut eſt baſis ad baſin. Quod tamen eodem argumento confirmari poteſt, quo uſi ſumus in triangulis, ſi prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipſi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipſi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita ſe habent inter ſe, ut baſes. Quod erat demonſtrandum. b 15. *quint.* c 34. *primi* d 34. *primi* e 11. *quint.*

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint,

quæ ad ſectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

TAB. XXII. fig. 12. IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, ſecta eſſe proportionaliter in D, & E, hoc eſt, eſſe ut AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis
a 37. primi enim rectis CD, BE, *a* erunt triangula DEB, DEC, ſuper eandem baſin DE, & inter eaſdem parallelas DE, BC, conſtituta inter ſe æqualia.
b 7. quint. *b* Quare ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt triangulum idem ADE, ad triangu-
c 1. ſext. lum DEC: *c* Atqui ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt baſis AD, ad baſin DB; (cum hæc triangula ſint ejuſdem altitudinis, ut conſtat, ſi per E, agatur parallela recta ipſi AB.) & eadem ratione, ut triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita eſt baſis AE, ad baſin EC.
d 11. quint. *d* Ut igitur AD, ad DB, ita eſt AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem ſint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & ejuſdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) Quod eſt propoſitum.

Secet deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam eſſe reliquo lateri BC. Ductis enim rurſum rectis CD, BE,
e 1. ſext. *e* erit ut baſis AD, ad baſin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum ſint ejuſdem altitudinis: Ponitur autem ut AD, ad DB, ita
f 11. quint. AE, ad EC. *f* Igitur erit ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed rur-
g 1. ſext. ſus *g* ut baſis AE, ad baſin EC, ita eſt triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum ſint alti-
h 11. quint. tudinis ejuſdem. *h* Igitur ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita eſt triangulum idem
i 9. quint. ADE, ad triangulum DEC. *i* Æqualia ergo ſunt triangula DEB, & DEC: ac propterea,
k 39. primi cum eandem habeant baſin DE, *k* inter eaſdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela eſt DE, ipſi BC, quod eſt propoſitum. Si itaque

ad

Digitized by Google

ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, bifariam ſecat trianguli ipſius angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, ſecet primo angulum BAC, bifariam. Dico eſſe ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipſi AD, donec cum CA, producta conveniat in E; (coibunt autem omnino, BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores ſunt duobus rectis *i*. Cum enim C, & CDA, *a* minores duobus rectis ſint; *b* ſit autem angulus CDA, angulo CBE, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & CBE, duobus rectis minores,) *c* eritque angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter ſe æquales; *d* Ideoque & rectæ BA, EA, inter ſe æquales. *e* Ut igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. *f* Atqui ut EA, ad AC, ita eſt BD, ad DC. Cum in triangulo BCE, recta AD, ſit parallela lateri BE. *g* Igitur ut BA, ad AC, ita eſt BD, ad DC. Quod eſt propoſitum.

TAB. XXII. fig. 13.
i 13. pron.
a 17. primi
b 29. primi
c 29. primi
d 6. primi
e 7. quint.
f 2. ſext.
g 11. quint.

Sit deinde ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam ſecare angulum BAC. Agatur enim rurſus per B, recta BE, ipſi AD,

 paral-

Digitized by Google

h 31. primi parallela *h* coiens cum CA, protracta in E. Quoniam igitur ut BA, ad AC, ita ponitur BD, ad DC. *e* Ut autem BD, ad DC, ita eſt EA, ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD, ſit lateri BE, parallela) *f* erit ut BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. *g* Æquales igitur ſunt BA, & EA, inter ſe, *h* ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt. *i* Cum igitur angulus ABE, æqualis ſit alterno BAD, & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter ſe æquales, quod eſt propoſitum. Itaque ſi trianguli angulus bifariam ſectus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 2. ſext.
f 11. quint.
g 9. quint.
h 5. primi
i 29. primi

IV. THEOR. 4. PROPOS. 4.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

TAB. XXII. fig. 14.

SInt æquiangula triangula ABC, DCE, ſintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, BAC, CDE. Dico eſſe AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE, ad ED; & AB, denique ad AC, ut DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos ſunt proportionalia, homologaque ſunt ea latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur, hoc eſt, & antecedentia omnia æquales reſpiciunt angulos, & conſequentia ſimiliter. Conſtituantur latera BC, CE, ſecundum lineam rectam, ita ut angulus DCE, externus ſit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, *a* minores ſunt duobus rectis: eſt autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. *b* Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conveniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis eſt

a 17. primi
b 13. pron.

eſt interno oppoſito ABC; *c* parallelæ erunt CD, c 28. *primi*
& BF, Eadem ratione parallelæ erunt CA, &
EF, quod angulus externus ACB, ſit æqualis interno DEC. Parallelogrammum eſt igitur ACDF,
d proptereaque recta AF, æqualis rectæ CD; & d 34. *primi*
recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela eſt lateri EF,
e erit AB, ad AF, hoc eſt, ad DC, (quæ æ- e 2. *ſext.*
qualis eſt ipſi AF,) ut BC, ad CE. Permutando *f* igitur erit AB, ad BC, ut DC, ad CE. f 16. *quint.*
Rurſus quia in eodem triangulo BEF, recta CD,
parallela eſt lateri BF, *g* erit BC, ad CE, ut g 2. *ſext.*
FD, hoc eſt, ut CA, (quæ æqualis eſt ipſi FD,)
ad ED. Permutando *h* igitur erit BC, ad CA, h 16. *quint.*
ut CE, ad ED. Cum igitur ſit AB, ad BC,
ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE, ad
ED: *i* erit & ex æqualitate AB, ad CA, ut DC, i 22. *quint.*
ad ED. Quod eſt propoſitum. Æquiangulorum
ergo triangulorum proportionalia ſunt latera, &c.
Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo ſimile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE, Dico triangulum ADE, triangulo ABC, eſſe ſimile. Æquiangula namque ſunt, *k* cum anguli ADE, AED, æquales ſint angulis ABC, ACB, externis; & angulus A, communis. Quare ut demonſtratum eſt, *l* habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, ſimilia ſunt. *TAB. XXII. fig. 15.* k 29. *primi* l 4. *ſext.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur.

HAbeant triangula ABC, DEF, latera proportionalia, ſitque AB, ad BC, ut DE, ad *TAB. XXIII. fig. 1.*

 EF,

Digitized by Google

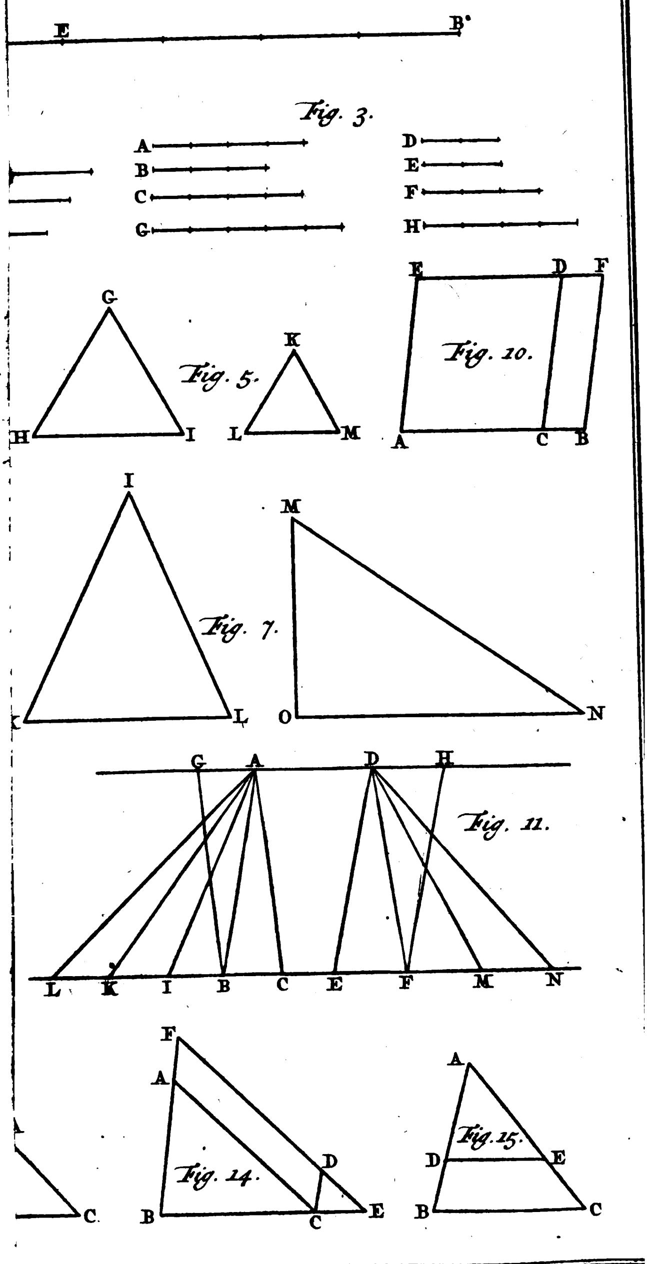
EF, & BC, ad CA, ut EF, ad FD, & AB, denique ad AC; ut DE, ad DF. Dico triangula eſſe æquiangula, angulum ſcilicet A, æqualem eſſe angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æ-
k 23. primi quales reſpiciunt homologa latera. *k* Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conveniantque rectæ EG, FG, in G:
a 32. primi *a* eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur ſunt triangula ABC,
b 4. ſext. GEF. Quare *b* ut AB, ad BC, ita eſt GE, ad EF: Ut autem AB, ad BC, ita ponitur DE,
c 11. quint. ad EF. *c* Igitur ut GE, ad EF, ita eſt DE,
d 9. quint. ad EF, eandem: *d* proptereaque æquales erunt
e 4. ſext. GE, DE. Rurſus, *e* quoniam ut BC, ad CA, ita eſt EF, ad FG: Ut autem BC, ad CA, ita
f 11. quint. ponitur EF, ad FD; *f* erit ut EF, ad FG, ita
g 9. quint. eadem EF, ad FD; *g* ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia ſint lateribus DE, DF, utrumque utrique; & baſis
h 8. primi communis EF; *h* erunt anguli G, & D, æqua-
i 4. primi les, *i* ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus, G, æqualis ſit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit, quod eſt propoſitum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod oſtendendum erat.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

TAB. XXIII. fig. 2. SIt angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, ſintque latera AB, BC, pro-

TAB. XXII.



Digitized by Google

proportionalia lateribus DE, EF, hoc eſt, ſit AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales eſſe, angulum ſcilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera reſpiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; *d* & angulo C, angulus EFG, eritque ut in præcedenti propoſ. dictum eſt, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare *a* ut AB, ad BC, ita eſt, GE, ad EF: Sed ut AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. *b* Igitur ut DE, ad EF, ita eſt GE, ad eandem EF; *c* atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia ſint lateribus GE, EF, & anguli ipſis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus eſt æqualis angulus FEG, æqualis eſt poſitus angulus DEF, proptereaque æquales ad invicem erunt anguli DEF, GEF.) *d* erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, ſit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod eſt propoſitum. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 23. *primi*
a 4. *ſext.*
b 11. *quint.*
c 9. *quint.*
d 4. *primi.*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero ſimul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

Sit angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angu-

TAB. XXIII. fig. 3.

angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc eſt ſit ut AC, ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, ſit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula eſſe triangula, angulos ſcilicet ACB, & F, circa quos ſunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales eſſe. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo poſito, ſi anguli ACB, & F, non ſunt æquales, ſit ACB, major quam F: fiatque ipſi F, æqualis ACG. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis,
a 32. primi *a* erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt.
b 4. ſext. Quare *b* ut AC, ad CG, ita erit DF, ad EF: Sed ut DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB.
c 11. quint. *c* Ut igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC,
d 9. quint. ad CB, *d* ac propterea æquales erunt CG, CB,
e 5. primi *e* & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC,
f 13. primi recto major; *f* cum AGC, CGB, ſint duobus rectis æquales: Eſt autem oſtenſus angulus AGC, angulo E, æqualis. Major igitur recto eſt quoque angulus E: Sed poſitus eſt etiam recto minor. Quod eſt abſurdum.

Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque ut prius, angulus B, angulo CGB, æqualis, ideoque & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, ſed vel majores, vel æquales duobus rectis,
g 17. primi quod eſt abſurdum. *g* Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales ſunt anguli ACB,
h 32. primi & F, ſed æquales, atque *h* idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt, quod eſt propoſitum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC, ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, ſimilia eſſe & toti triangulo ABC, & inter ſe. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC, & ADB, ſint recti, & angulus B, communis; *a* erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Æquiangulum eſt igitur triangulum DBA, triangulo ABC, *b* ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc eſt, erit ut CB, ad BA, ita BA, ad BD; & ut BA, ad AC, ita BD, ad DA; & ut BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, ut vult propoſ. 4. hujus lib. Quare ſimile eſt triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo oſtendetur triangulum ADC, ſimile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, ſunt recti, & angulus C, communis; *c* ac propterea anguli ABC, & CAD, æquales. Quare *d* ut BC, ad CA, ita eſt CA, ad CD; & ut CA, ad AB, ita CD, ad DA, & ut CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præſcripto propoſ. 4. hujus lib. Non ſecus demonſtrabitur, ſimilia inter ſe eſſe triangula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC, ſint recti, & anguli ABD, CAD, oſtenſi æquales, nec non anguli BAD, ACD; Atqui idcirco ſit *e* ut BD, ad CA, ita DA, ad DC; & ut DA, ad AB, ita DC, ad CA; & ut AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis

TAB. XXIII. fig. 4.

a 32. *primi*

b 4. *ſext.*

c 32. *primi*

d 4. *ſext.*

e 4. *ſext.*

Digitized by Google

laris ducta ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſin demittitur, eſſe mediam proportionalem inter duo baſis ſegmenta: Item utrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam baſin, & illud ſegmentum baſis, quod ei lateri adjacet.

Oſtenſum eſt enim, eſſe ut BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, eſſe mediam proportionalem inter BD, & CD: Item eſſe ut CB, ad BA, ita BA, ad BD; & idcirco BA, mediam eſſe proportionalem inter CB, & BD: Denique eſſe ut BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, eſſe proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod eſt propoſitum.

xi. PROBL. I. PROPOS. 9.

A data recta linea imperatam partem auferre.

TAB. XXIII. fig. 5. IMperetur, ut ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, utcunque faciens angulum CAB; & ex AC, abſcindantur tot partes æquales cujuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda eſt ex AB, ut in propoſito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, eſſe partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela ſit recta DG; *a* erit ut FD, ad DA, ita BG, ad GA. *b* Componendo igitur, ut FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipſius AD, eſt tripla, ex conſtructione. Igitur & BA, ipſius AG, erit tripla; ideoque AG, tertia pars erit ipſius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abſtulimus. Quod faciendum erat.

a 2. ſext. *b 18. quint.*

THEOR.

Digitized by Google

PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, ut data altera recta ſecta fuerit.

SIt recta AB, ſecanda ſimiliter, ut ſecta eſt recta AC, in D, & E, hoc eſt, in partes, quæ ſint partibus AD, DE, EC, proportionales. Conjungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipſi BC. Dico rectam AB, ſimiliter eſſe ſectam in F, & G, ut eſt ſecta AC, in D, & E, *a* ut AD, ad DE, ita eſt AF, FG. Proportionales ergo ſunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod ſi ducatur DH, ipſi FB, parallela, ſecans EG, in I; *b* erit rurſus, ut DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc eſt, ita FG, ad GB; *c* quod FG, ipſi DI, & GB, ipſi IH, æqualis ſit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio eſt de pluribus partibus, ſi ex E, & C, ipſi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecuimus, ut data altera recta ſecta fuit. Quod faciendum erat.

TAB. XXIII. fig. 6.

a 2. ſexti.
b 2. ſexti.
c 34. primi

PROBL. 3. PROPOS. 11. x.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinvenire.

SInt duæ rectæ AB, AC, ita diſpoſitæ, ut efficiant angulum A, quemcunque, ſitque invenienda illis tertia proportionalis, ſicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus eſſe antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipſi AC, quæ conſequens eſſe debet, ſive media. Deinde ducta recta BC, agatur

TAB. XXIII. fig. 7.

agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipſi AC, productæ in E. Dico CE, eſſe tertiam proportionalem, hoc eſt, eſſe ut AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela ſit recta BC; *a* erit ut AB, ad BD, ita AC, ad CE: *b* Sed ut AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipſi BD. Ut igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum.

a 2. *ſext.* b 7. *quint.*

SCHOLIUM.

Inventa autem tertia linea continue proportionali, ſi primam omiſeris, & aliis duabus tertiam inveneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Ut ſi lineis A, & B, adinveniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, ſexta, ſeptima, octava; & ſic in infinitum.

TAB. XXIII. *fig.* 16.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

TAB. XXIII. *fig.* 8.

Sint tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus invenienda ſit quarta proportionalis; ſicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Diſponantur primæ duæ AB, BC, ſecundum lineam rectam, quæ ſit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, eſſe quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta ſit parallela BD; *a* erit ut AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta

a 2. *ſext.*

quarta eſt proportionalis; ac propterea tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 5. PROPOS. 13. ix.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinvenire.

SInt duæ rectæ AB, BC, quibus media invenienda eſt proportionalis, diſpoſitæ ſecundum lineam rectam AC. Diviſa AC, bifariam in E, ex E, centro, & intervallo EA, vel EC, ſemicirculus deſcribatur, ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam uſque. Dico BD, eſſe, mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; *a* erit angulus ADC, rectus in ſemicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta ſit ad baſin AC, perpendicularis DB, erit per corollarium propoſ. 8. hujus lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum. *TAB. XXIII. fig. 9.* *a 31. tertii.*

THEOR. 9. PROPOS. 14. xiij.

Æqualium & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

SInt duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reci- *TAB. XXIII. fig. 10.*

 proca,

Digitized by Google

proca, hoc eſt, eſſe ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Conjungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, & BG, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, ſint æquales, erunt & EB, BC, una recta linea, ut ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtravimus. Producantur jam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur

a 7. quint. æqualia ſunt parallelogramma DB, BF: *a* erit ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed ut

b 1. ſext. DB, ad BH, *b* ita eſt AB, baſis ad baſin BG, quod parallelogramma ſint ejuſdem altitudinis; & ſimiliter ut BF, ad BH, ita eſt baſis EB, ad baſin BC. Igitur ut AB, ad BG, ita eſt EB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

E contrario ſint jam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſit, ut AB, ad BG, ita EB, ad

c 1. ſext. BC: *c* Ut autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & ut EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit

d 9. quint. quoque DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. *d* Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

xiv. THEOR. 10. PROPOS. 15.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.

TAB. XXIII. fig. 11. Sint duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe ut

ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Conjungantur enim triangula ad angulos æquales, ita ut AB, BE, efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, DBE, ſint æquales; erunt & DB, BC, una recta linea, ut demonſtratum eſt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia ſunt triangula ABC, DBE, *a* erit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed ut triangulum ABC, ad triangulum BCE, *b* ita eſt baſis AB, ad baſin BE, quod hæc triangula ejuſdem ſint altitudinis; & ſimiliter ut DBE, & BCE, ita eſt baſis DB, ad BC. Quare ut AB, ad BE, ita eſt DB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

a 7. *quint.*
b 1. *ſext.*

Jam vero contra, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem, cum ſit ut AB, ad BE, ita DB, ad BC; ut autem AB, ad BE, *c* ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & ut DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE; Erit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, *d* proptereaque æqualia erunt triangula ABC, DBE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

c 1. *ſext.*
d 9. *quint.*

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur, rectangulo; illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; ut quidem AB, ad FG, ita EF, ad

TAB. XXIII. fig. 12.

Digitized by Google

ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehenſum ſub extremis AB, BC; rectangulum vero EFGH, comprehenſum ſub mediis EF, FG: Dico rectangula AC, EG, eſſe æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit ut AB, ad FG, ita EF, ad BC, erunt latera
a 14. ſext. circa æquales angulos B, & F, reciproca. *a* Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod eſt propoſitum.

Contra vero, ſint jam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe ut AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia ſint rectangula AC, EG, habeantque angulos æqua-
b 14. ſext. les, nempe rectos B, & F, *b* erunt latera circa hoſce angulos reciproca; ſicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

XVI. THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

TAB. XXIII. fig. 13. SInt tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: ut quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: ſitque rectangulum ABCD, contentum ſub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, ſit EFGH. Dico æqualia eſſe rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis ſit ipſi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; ut quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehenſum ſub mediis EF, FG, propter æqua-

qualitatem rectarum EF, FG. *a* Quare rectangulum AC, comprehenſum ſub extremis AB, BC, æquale eſt quadrato EG, hoc eſt, rectangulo ſub mediis EF, FG, comprehenſo: Quod eſt propoſitum. a 16. *ſext*

Sed ſint jam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico eſſe ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia ſint rectangula AC, & EG; *b* erit ut AB, ad EF, ita FG, ad BC: b 16. *ſext.* *c* Ut autem FG, ad BC, ita eſt EF, ipſi FG, c 7. *quint.* æqualis, ad eandem BC. Quare ut AB, ad EF, ita eſt EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex poſteriori hujus theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam eſſe mediam proportionalem inter quaſvis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, oſtenſum fuit, eſſe ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media eſt proportionalis inter AB, & BC.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A data recta linea dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.

SIt data recta AB, ſuper quam deſcribendum ſit rectilineum rectilineo CDEFG, ſimile ſimiliterque poſitum. Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad ſingulos angulos oppoſitos rectæ lineæ, quæ rectilineum reſolvant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI; coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores *TAB. XXIII. fig.* 14.

 ſunt

Digitized by Google

ſunt, cum æquales ſint duobus angulis FCD,
a 17. primi FDC, *a* qui duobus rectis ſunt minores)
b 32. primi *b* eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rurſus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, an-
c 17. primi gulus BIH. Et *c* quia duo anguli EDF, EFD, minores ſunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & an-
d 17. primi gulo FCG, angulus IAK: *d* Et quia duo anguli GCF, GFC, minores ſunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, convenient in aliquo puncto. Conveniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec abſolvantur omnia triangula rectilinei propoſiti, ſi plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, ſimile eſſe, ſimiliterque poſitum. Cum enim angulus IAB, conſtitutus ſit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut conſtat ex conſtructione; cum ſingulæ partes unius ſingulis partibus alterius factæ ſint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK,
e 4. ſext. rectilineo CDEFG. Quoniam vero *e* ita eſt AB, ad BI, ut CD, ad DF: & ita BI, ad BH, ut
f 22. quint. DF, ad DE: *f* erit ex æquo ita AB, ad BH, ut CD, ad DE. Quare latera circa æquales angu-
g 4. ſext. los ABH, CDE, proportionalia ſunt, *g* quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia ſunt, ob triangula æquiangula
h 4. ſext. BHI, DEF. *h* Rurſus ita eſt HI, ad IB, ut EF, ad FD, & ita IB, ad IA, ut FD, ad FC:
i 22. quint. & ita IA, ad IK, ut FC, ad FG. *i* Igitur

ex

ex æquo erit ita HI, ad IK, ut EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & ſic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum ſint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterque deſcripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SInt triangula ſimilia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et ſit ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter ſe rationem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa BC, & EF, vel AB, & DE, vel AC, & DF; Hoc eſt, ſi homologis lateribus BC, EF, inveniatur tertia proportionalis BG: ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, ut rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defin. 10. lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF: proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita ut nihil aliud ſit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras ſimiles, ſimiliterque poſitas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita eſſe triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, ut eſt prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic ſunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continue proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia pro- TAB. XXIII. fig. 15.

 por-

Digitized by Google

portionalis BG, illis æqualis: ita ut proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, ſit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, *a* quod ipſa inter ſe æqualia ſint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adjacent: erit triangulum ad triangulum, ut recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam habet latus BC, ad latus EF, duplicata. Quod etiam hinc conſtare poteſt. Quoniam, ut dictum eſt, triangula ABC, DEF, æqualia ſunt, hoc eſt, proportionem æqualitatis habent, ſicut & latera homologa BC, EF: proportio autem æqualitatis duplicata ſolum efficit proportionem æqualitatis: (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad ſecundam, ut conſtat ex defin. 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundam,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam ejus, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod eſt propoſitum.

a 26. *prim*

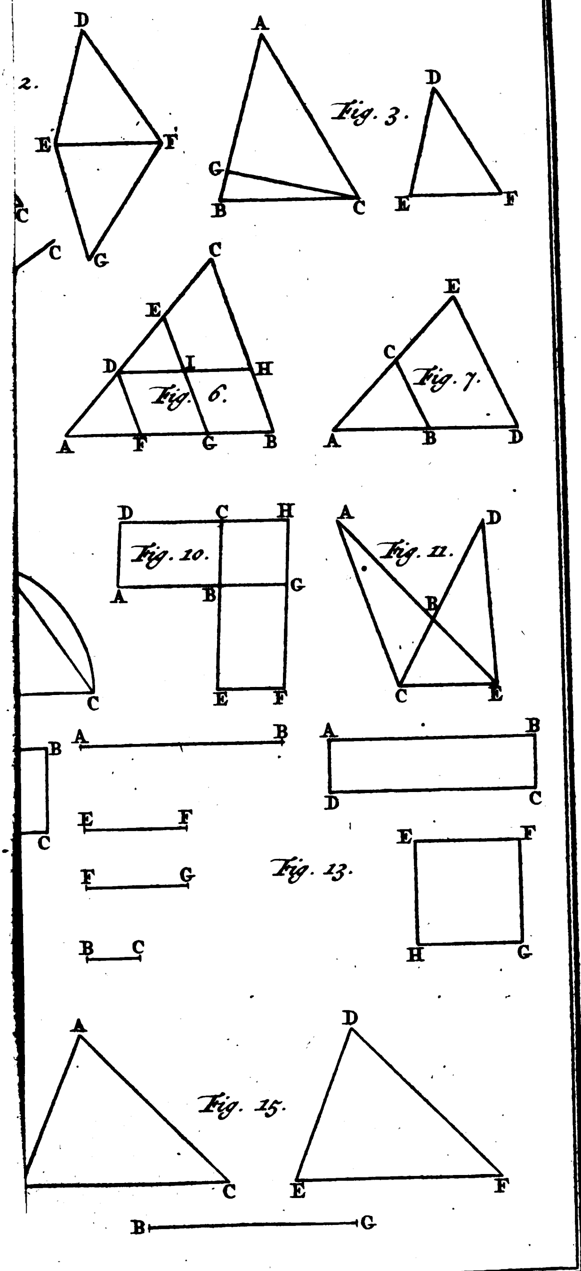
TAB. XXIV. *fig.* 1. Sit deinde BC, latus latere EF, majus; & ex BC, *b* abſcindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturque recta AG. Quia igitur eſt ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando ut AB, ad DE, ita BC, ad EF: Ut autem BC, ad EF, ita eſt per conſtructionem EF, ad BG. Ut ergo AB, ad DE, *c* ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, *d* ipſa inter ſe æqualia erunt; & propterea ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, *e* ita erit idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Ut autem triangulum ABC, ad triangulum ABG,

b 11. *ſext.* *c* 11. *quint.* *d* 15. *ſext.* *e* 7. *quint.*

ejuſdem

Digitized by Google

TAB. XXIII.



Digitized by Google

Digitized by Google

ejuſdem altitudinis, *f* ita eſt baſis BC, ad baſin BG. Igitur ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, ſint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, ſecundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum. f 1. *ſext.*

COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut eſt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum.

Sint enim tres rectæ proportionales A, B, C; & ſuper primam A, & ſecundam B, conſtituta triangula A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta. Dico, ut eſt recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita eſſe triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, eſt, per definitionem 10. lib. 5. duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. *g* Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B. *TAB. XXIV. fig.* 2. g 19. *ſext.*

Eodem modo oſtendes, ita eſſe triangulum ſupra ſecundam ad triangulum ſupra tertiam ſimile ſimiliterque deſcriptum, ut eſt prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & ſuper B, ſecundam, & A, tertiam conſtituantur triangula ſimilia ſimiliterque poſita B, & A. Dico, ut eſt, recta C, ad rectam A, ita eſſe triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata eſt proportionis C, ad B, hoc eſt, rectæ B, ad rectam A. *h* Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, ſunt latera homologa: Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A. h 19. *ſext.*

xviij. THEOR. 14. PROPOS. 20.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

TAB. XXIV. fig. 3. Sint polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & ſic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & ut BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona dividi in triangula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint AC, AD, FH, FI; diviſaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Item angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppoſitos: *b* Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter ſe ſimilia erunt. Eadem ratione erunt ſimilia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde *c* quia eſt ut AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, FGH; ut autem CB, ad CD, ita eſt, ex hypotheſi, HG, ad HI, ob ſimilitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo ut AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; eſt autem & ablatus ACB, oſtenſus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis, *e* Quare triangula ACD, FHI, cum habeant

a 6. ſext.
b 4. ſext.
c 4. ſext.
d 22. quint.
e 6. ſext.

Digitized by Google

beant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque ſimilia. Eademque ratio eſt de aliis omnibus triangulis, ſi plura fuerint.

Dico præterea, triangula hæc eſſe homologa totis polygonis, hoc eſt, ita eſſe quodlibet triangulum in uno polygono ad ſuum correſpondens triangulum in altero polygono, ut polygonum ad polygonum. Quoniam enim ſimilia ſunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. *g* Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare ut triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum utraque hæc proportio triangulorum ſit duplicata ejuſdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque diſſimili ratione concludetur quoque eſſe triangulum ADE, ad triangulum FIK, ut ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius ſint antecedentia, & triangula alterius conſequentia proportionum. Ut autem unum antecedens ad unum conſequens *f* ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad ſibi reſpondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

g 19. *ſext.*

f 12. *quint.*

Dico poſtremo, polygona inter ſe proportionem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa, hoc eſt, ſi homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inveniatur tertia linea proportionalis, ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, ut eſt prima linea AB, ad tertiam inventam: ac proinde, cum proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem poly-

polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim ſit, ut triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH,
g 19. ſext. g habeat proportionem duplicatam ejus, quam habent latera homologa AB, FG, hoc eſt eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam; habebunt quoque polygona inter ſe proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc eſt, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam. Itaque ſimilia polygona in ſimilia triangula dividuntur, &c. Quod demonſtrandum eſt.

COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi fuerint tres rectæ proportionales, ut eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum: Vel ita eſſe polygonum ſuper ſecundam deſcriptum ad polygonum ſuper tertiam ſimile
TAB. XXIV. fig. 4. ſimiliterque deſcriptum; uti ſi A, B, & C, ſint tres proportionales, atque ſuper A, & B, deſcribantur duo polygona ſimilia, uti ſunt quadrata A, & B, erit A, ad C, ut quadratum ſuper A, ad quadratum ſuper B.

Hoc non aliter demonſtrabitur ex hoc theoremate, quam oſtenſum fuit corollarium præcedentis theorematis ex ſuo theoremate. Ut perſpicuum eſt in hac figura.

XX. THEOR. 15. PROPOS. 21.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

TAB. XXIV. fig. 5. Sint rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, ſimilia. Dico & ipſa inter ſe eſſe ſimilia. Cum enim propter ſimilitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales ſint angulis rectilinei GHI;

Item

Digitized by Google

Item eadem de cauſa anguli rectilinei DEF, æquales angulis ejuſdem rectilinei GHI; *a* erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rurſus cum ob eandem ſimilitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia ſint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet iis, quæ circum æquales ſunt angulos: Item eandem ob cauſam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus ejuſdem rectilinei GHI; *b* erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem primam hujus, ſimilia exiſtent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod erat oſtendendum.

a 1. pron

b 11. quint.

THEOR. 16. PROPOS. 22. xxii.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, ut quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Conſtituanturque ſuper AB, CD, duo quæcunque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ABI, CDK; Item ſuper EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea eſſe proportionalia, ut quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. *a* Inveniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. *b* eritque ex æquo, ut AB, ad P, ita EF, ad Q: Ut autem AB, ad P, ita eſt rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, ſimile ſimiliterque deſcriptum, ex coroll. propoſ. 20.

TAB. XXIV. fig. 6.

a 11. ſext.

b 22. quint.

Digitized by Google

20. hujus lib. vel ſi fuerint triangula, ex coroll. propoſ. 19. Et eadem ratione, ut EF, ad Q, c 11. quint. ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. c Igitur ut ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod eſt propoſitum.

Deinde ſint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, eſſe quoque proportionales, ut quidem d 12. ſext. AB, ad CD, ita EF, ad GH. d Inveniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, ſuper quam deſcribatur rectilineum RSVT, ſimile rectilineo EM, ſimiliterque poſi- e 21. ſext. tum; e & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur eſt, ut AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque ut jam eſt oſtenſum, ut ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Ut autem ABI, ad CDK, f 11. quint. ita quoque ponitur EM, ad GO. f Igitur erit g 9. quint. ut EM, ad RV, ita EM, ad GO; g Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterque poſita, conſiſtent neceſſario, ut mox oſtendemus ſuper rectas RS, GH, æ- h 7. quint. quales. h Quare erit ut EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, ut AB, ad i 11. quint. CD. i Igitur erit quoque ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

Quod autem æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, qualia ſunt GO, RV, conſiſtant ſuper rectas æquales, ita oſtendetur. Si enim inæquales ſunt GH, RS; ſit. GH, major. Cum igitur, ob ſimilitudinem rectilineorum, ſit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, major quam RS, erit quoque HO, major quam SV, & propterea rectilineum GO, majus rectilineo RV, cum hoc intra ipſum poſſit conſtitui; quod eſt ab-

abſurdum, cum ſit contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt rectæ GH, RS. Quod eſt propoſitum.

Aliter. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & ſimilia ſimiliterque poſita. Dico latera homologa, cujuſmodi ſunt rectæ AB, DE, eſſe æqualia. Si enim non credantur æqualia, ſit AB, majus, quam, DE, inveniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo eſt, ut AB, ad DE, ita DE, ad G. Eſt autem AB, major, quam DE. Erit quoque DE, major, quam G, ac propterea multo major AB, quam G. Ut vero AB, ad G, ita eſt rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propoſ. 19. vel 20. hujus lib. Igitur cum AB, major ſit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, majus rectilineo DEF, quod eſt abſurdum, cum poſitum ſit æquale. Non ergo major eſt AB, recta quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus oſtenderetur rectilineo DEF, quod eſt contra hypotheſin. Quare æquales ſunt rectæ AB, DE. TAB. XXIV. fig. 7.

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiv.

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SInt parallelogramma æquiangula AC, CF, habentis angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum eſſe compoſitam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum ſint in uno Parallelogrammo, & conſequen- TAB. XXIV. fig. 8.

quentia in altero; hoc eſt, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compoſitam eſſe ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id eſt, ſi ſumantur tres lineæ I, K, L, ita ut I, ad K, ſit, ſicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, ut latus DC, ad latus CE; ita eſſe parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, ut eſt recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. hujus lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compoſitam eſſe ex eiſdem proportionibus; hoc eſt, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Conjungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut BC, CG, efficiant unam lineam rectam: Quo poſito, cum anguli BCD, ECG, ſint æquales, erunt & DC, CE, una recta linea, ut ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtravimus. Producantur deinde AD, FG, donec conveniant in H; Sumptaque recta I, quacunque, *a* inveniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur eſt, *b* ut BC, ad CG, ita AC, ad CH. Ut autem BC, ad CG, ita poſita eſt I, ad K, *c* erit quoque ut AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento oſtendes eſſe, ut HC, ad CF, ita K, ad L. Nam ut DC, ad CE, *d* ita eſt HC, ad CF. Cum ergo poſita ſit K, ad L, ut DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, ut K, ad L: *e* Ex æquo igitur erit, ut AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. hujus lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione oſtendemus, proportionem AC, ad

a 12. *ſext.*
b 1. *ſext.*
c 11. *quint.*
d 1. *ſext.*
e 22. *quint.*

Digitized by Google

ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita conjungantur ad angulos æquales, ut BC, CG, efficiant unam rectam lineam, &c. Æquiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 18. PROPOS. 24. xxii.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

ESto parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet ejus punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo & inter ſeſe. Quod enim æquiangula ſint toti, facile oſtendetur. Nam angulus GAE, idem eſt, qui angulus BAD; *a* & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum eſt EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum ſit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, ut perſpicuum eſt ex 29. propoſ. lib. 1. vel etiam ex coroll. propoſ. 4. hujus lib. *b* erit ut AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia ſunt. Rurſus *c* erit, ut BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item ut CA, ad CD, ita IA, ad IE. *d* Ex æquo igitur, ut BC, ad CD, ita eſt GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia

TAB. XXIV. fig. 9.

a 29. *primi*

b 4. *ſexti.*

c 4. *ſext.*

d 22. *quint.*

 exiſtunt.

Digitized by Google

exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales eſſe proportionalia. Quare per definitionem primam hujus, ſimile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte oſtendes parallelogrammum FH, ſimile eſſe eidem parallelogrammo BD; e 21. *ſext.* *e* atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

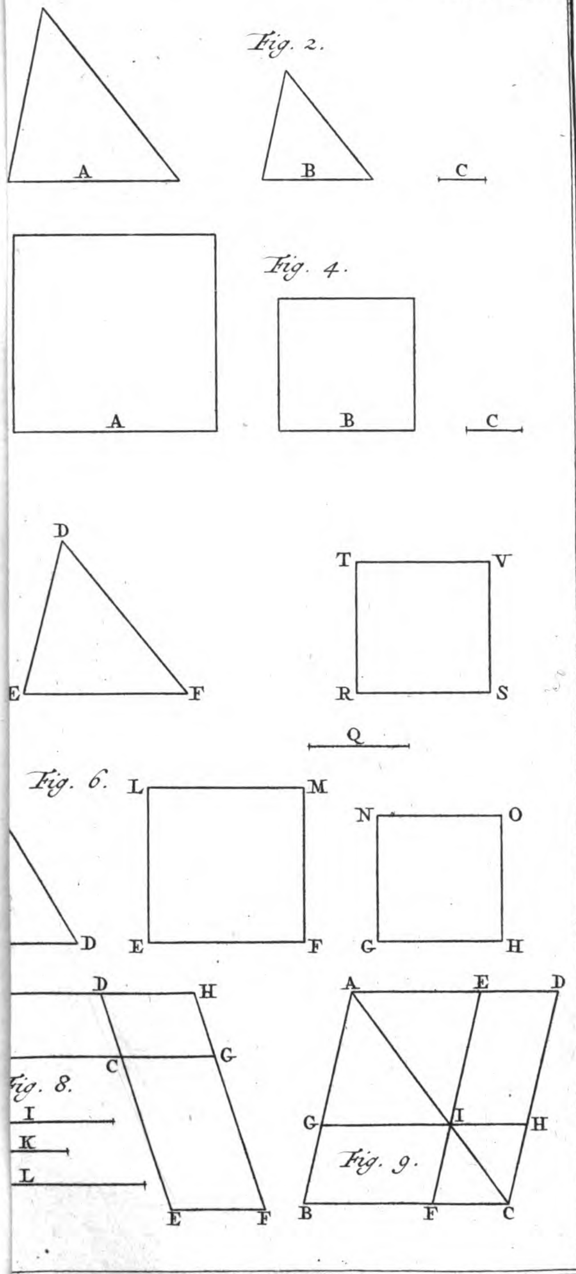
XXV. PROBL. 7. PROPOS. 25.

Dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere.

TAB. XXV. fig. 1. Sint data duo rectilinea A, & B; ſitque conſtituendum aliud rectilineum, quod ſimile quidem ſit ipſi A, æquale vero ipſi B. Super CD, unum latus rectilinei, cui ſimile debet conſtitui, a 44. *vel* 45. *primi* *a* conſtituatur parallelogrammum CE, in quovis angulo, æquale rectilineo A; Et ſuper rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis ſit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipſi B, eritque tam CDG, quam FEH, linea una recta, ut demonſtratum eſt propoſ. 45. lib. 1. b 13 *ſext.* *b* Inveniatur jam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK, c 18. *ſext.* *c* ſuper quam conſtituatur rectilineum L, ſimile ipſi A, ſimiliterque poſitum. Dico L, æquale eſſe alteri rectilineo B. Cum enim ſint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propoſ. 19. vel 20. hujus lib. ut CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum ſuper primam CD, ad rectilineum L, ſuper IK, ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum: d 1. *ſext.* *d* Ut autem CD, ad DG, ita eſt parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, ejuſdem altitudinis. e 11. *quint.* *e* Igitur erit ut CE, ad DH, ita A, ad L. f 7. *quint.* *f* Ut autem CE, ad DH, ita eſt A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A, &

Digitized by Google

TAB. XXIV.



Digitized by Google

Digitized by Google

parallelogrammum DH, rectilineo B, conſtructum eſt æquale. *g* Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; *h* proptereaque æqualia erunt rectilinea B, & L: Eſt autem & L, ſimile ipſi A, ſimiliterque poſitum per conſtructionem. Dato igitur rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum. g 11. *quint.* h 9. *quint.*

THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiij.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

EX parallelogrammo BD, abſciſſum ſit parallelogrammum EG, ſimile ei ſimiliterque poſitum, habens cum ipſo angulum communem EAG. Dico EG, conſiſtere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ ſi fuerint una linea recta, perſpicuum eſt, cum AF, ſit diameter ipſius EG, & AC, diameter ipſius BD, parallelogrammum EG, conſiſtere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod ſi AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, ſecans latus EF, in H, puncto, per quod ipſi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, ſunt circa eandem diametrum AHC; *a* ipſa erunt ſimilia ſimiliterque poſita. *b* Quare erit ut BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed ut BA, ad AD, ita quoque eſt EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam ſimilia, ſimiliterque poſita. *c* Igitur erit ut EA, ad AI, ita EA, ad AG, *d* Ac propterea æquales erunt rectæ, AI, & AG, pars, & totum: quod eſt abſurdum. *TAB. XXV. fig.* 2. a 24. *ſext.* b 1. *def. ſext.* c 11. *quint.* d 9. *quint.*

TAB. XXV. fig. 3. Quod ſi dicatur recta AHC, ſecare alterum latus FG. Tunc ducta HI, parallela ipſi EF, *e* erunt rurſus ſimilia parallelogramma BD, IG, ſimiliterque poſita. *f* Quare erit ut DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed ut DA, ad AB, ita quoque eſt GA, ad AE, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BD, EG. *g* Igitur erit ut GA, ad AI, ita GA, ad AE, *h* ideoque æquales erunt rectæ AI, AE, pars & totum: Quod eſt abſurdum. Conſtituunt ergo rectæ AF, FC, unam rectam lineam; hoc eſt, ducta diameter AC, tranſit per punctum F; & ducta diameter AF, eaque producta cadit in punctum C. Itaque ſi à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 24. ſext. f 1. def. ſext. g 11. quint. h 9. quint.

xxvi. THEOR. 20. PROPOS. 27.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur; maximum, id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

TAB. XXV. fig. 4. Detur recta AB, diviſa bifariam in C, ſuperque ejus dimidiam BC, conſtituatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cujus diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH, erit parallelogrammum AD, ſuper dimidiam AC, conſiſtens, applicatum ſecundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & exiſtens ſimile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficiensque parallelogrammo CE, maximum eſſe omnium, quæ ſecundum AB, rectam applicantur, deficiuntque parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ipſi CE. Sumpto enim puncto G, utcunque in diametro BD, & ductis per G, rectis

rectis FGI, KG, quæ ſint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, ſecundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, *a* quod ipſi CE, ſimile eſt, ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem cum CE, diametrum. *b* Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia ſunt; ſi addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: *c* Eſt autem CI, æquale ipſi CF, propter baſes æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additaque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, majus ſit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, *d* æquale exiſtens ipſi CE, propter baſes æquales AC, CB, majus quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodemque modo oſtendetur AD, majus eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam AB, applicantur, ut punctum G, ſit inter puncta B, & D, hoc eſt, quæ occupant majorem lineam ſemiſſe AC, habentque minorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus ſimiles ſint ipſi CE.

a 24. *ſexti.*
b 43. *primi.*
c 36. *primi.*
d 36. *primi.*

Aliter demonſtrabitur AD, majus eſſe parallelogrammo AG, hoc modo. *e* Parallelogramma FD, DI, ſunt æqualia, cum baſes HD, DE, ſint æquales: Eſt autem DI, majus quam GE, hoc eſt, quam complementum CG, (*f* quod ipſi GE, æquale eſt,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, majus erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atque idcirco addito communi CF, majus erit AD, quam AG, parallelogrammum eodem DG.

e 36. *primi.*
f 43. *primi.*

Quod ſi punctum G, ſumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ ſit parallela ipſi AB, occurratque rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipſi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum ſecundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM,

TAB. XXV. fig. 5.

 g quod

g 24. ſext. g quod ipſi CE, eſt ſimile ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc majus eſſe AD, ipſo AG. Protracta
h 34. primi enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, h cum
i 36. primi æquales ſint æqualibus AC, CB; i ideoque
k 43. primi æqualia parallelogramma HD, DM. k Cum igitur DM, ſit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipſi DF. Eſt autem HD, majus quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, majus erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, majus erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iiſdem argumentis concludes AD, majus eſſe quocunque parallelogrammo ita applicato ſecundum rectam AB, ut punctum G, ſit ultra D, in diametro BD, producta; hoc eſt, quod occupat minorem lineam ſemiſſe AC, habetque majorem altitudinem, quam AD: dummodo defectus ſimilis exiſtat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxvij. PROBL. 8. PROPOS. 28.

Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non majus eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cum ſimiles fuerint defectus, & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus, cui ſimile deeſſe debet.

TAB. XXV. fig. 6. AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo quod ſit ſimile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam

riam in E, ſuper medietatem EB, *a* deſcribatur parallelogrammum EFGB, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale eſt ipſi C; cum ſit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, ſimile ipſi D, factum erit, quod jubetur. Si autem AF, majus eſt quam C. (Neque enim minus eſſe debet. Nam cum per propoſ. præcedentem, ipſum ſit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, non poſſet applicari ullum ad AB, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora. Propterea adjunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque ſibi æquale EG, majus quam C. Sit igitur majus rectilineo I. (Qua vero ratione exceſſus duorum rectilineorum ſit inquirendus, docuimus ad propoſ. 45. lib. 1.) *b* & conſtituatur parallelogrammum KLMN, ſimile quidem ſimiliterque poſitum ipſi D, ſeu ipſi EG, æquale vero exceſſui invento I; ut ſit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, ſimul; & ob id majus quam KM. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit ut EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoque latera EF, FG, majora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, eſſet etiam EG, æquale ipſi NL, vel minus, ut conſtat. Quare abſciſſis rectis FO, FQ, quæ ſint æquales ipſis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO, erit hoc ipſi LN, æquale, & eidem ſimile ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi EG: *c* atque adeo circa eandem diametrum cum EG, conſiſtet, quæ ſit BF, productis jam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, *d* quod ſimile eſt ipſi EG, ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi D. Dico igitur AP, æquale eſſe ipſi C, rectilineo. *e* Nam cum PG, æquale ſit complemento PE; ſi addatur commune PB, erit & BQ, æquale ipſi ER, hoc eſt, ipſi ES, *f* quod æquale eſt ipſi ER, propter baſes æquales EA, EB.

a 18. *ſext.*
b 25. *ſext.*
c 26. *ſext.*
d 24. *ſext*
e 43. *primi*
f 36. *primi*

Digitized by Google

EB. Quare ſi æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis eſt rectilineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale ſit ipſi C, una cum LN, ſi auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipſi C, æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum eſt parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod ſimile eſt dato parallelogrammo D, & æquale exiſtens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

xxviij. PROBL. 9. PROPOS. 29.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.

TAB. XXV. fig. 7. AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum ſit Parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit dato alteri parallelogrammo D. Diviſa AB,
a 18. ſext. bifariam in E; *a* ſuper dimidiam EB, conſtruatur parallelogrammum EFGB, ſimile ipſi D, ſimili-
b 14. ſex. terque poſitum. *b* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, conſtituatur quadratum H, æ-
c 25. ſext. quale; *c* cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, ſimile vero ipſi EG, ſimiliterque poſitum; eritque propterea IKLM, majus quam EFGB, quandoquidem æquale eſt quadrato H, quod conſtructum eſt rectilineo C, una cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob ſimilitudinem MK, EG, ſit ut MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, majora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, eſſet quoque MK, vel æquale ipſi EG, vel minus, ut perſpicuum eſt. Productis igitur FE, FG, ut rectæ FO, FN, æquales ſint rectis IM, IK, & completo paral-
lelo-

Digitized by Google

lelogrammo ON; erit hoc ſimile ſimiliterque poſitum ipſi EG, cum ſit æquale ipſi MK, & ſimile, ſimiliterque poſitum. *d*Quare ON, EG, circa eandem diametrum conſiſtent, quæ ſit FP. Productis jam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipſi FO, parallela conveniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, *e*quod ſimile eſt ipſi EG, ac propterea ipſi D. Dico igitur AP, æquale eſſe rectilineo C. *f*Nam cum AO, ER, ſint æqualia, *g*& ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipſi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis eſt rectilineo C. (Nam cum MK, hoc eſt, ON, æquale ſit rectilineo C, una cum EG, ſi auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum eſt AP, excedens parallelogrammo RQ, quod ſimile eſt alteri dato D. Quod faciendum erat.

d 26. ſexti.
e 24. ſexti.
f 36. primi
g 43. primi

PROBL. 10. PROPOS. 30. xxix.

Propoſitam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione ſecare.

SIt recta AB, ſecanda extrema ac media ratione. Deſcripto ſuper eam quadrato ABCD; *a*ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, ſimile ipſi quadrato, ita ut ſit AF, quoque quadratum, cum quadrato ſolum quadratum ſit ſimile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Cum enim æqualia ſint DF, & AC, ſi dematur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, utpote rectos, *b*erunt latera

TAB. XXV. fig. 8.
a 29. ſexti.
b 14. ſexti.

Digitized by Google

circa illos reciproca, hoc eſt, erit ut EH, hoc eſt, ut AB, ipſi EH, æqualis, ad HF, hoc eſt, ad AH, ipſi HF, æqualem, ut AH, ad HB. Quare cum ſit, ut tota AB, ad ſegmentum AH, ita ſegmentum AH, ad ſegmentum HB, ſecta eſt AB, extrema ac media ratione, per definitionem tertiam hujus. Propoſitam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

Aliter quoque oſtendemus AB, eſſe ſectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, ſitque rectangulum HC, comprehenſum ſub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; *c* erunt ipſæ proportionales: ut AB, quidem prima ad AH, ſecundam, ita AH, ſecunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem ſecta eſt AB, in H, extrema ac media ratione.

c 17. ſext.

d 11. ſec. Aliter totum problema conficiemus. *d* Dividatur AB, in C, ita ut rectangulum ſub tota AB, & ſegmento CB, æquale ſit quadrato alterius ſegmenti AC. Dico AB, in C, eſſe ſectam extrema ac media ratione. *e* Erunt enim rurſus, ut prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Conſtat ergo propoſitum.

TAB. XXV. fig. 9. *e 17. ſext.*

THEOR. 21. PROPOS. 31.

In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

TAB. XXV. fig. 10. *a 18. ſext.*

TRiangulum rectangulum ſit ABC, habens angulum BAC, rectum; deſcribaturque ſuper BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, *a* cui ſimiles ſimiliterque poſitæ ſuper AB, AC, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per

coroll.

coroll. propoſ. 8. hujus lib. ut BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare ut BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, ſuper primam, ad figuram CH, ſuper ſecundam ſimilem ſimiliterque poſitam, per coroll. propoſ. 19. vel 20. hujus lib. & convertendo ut CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non ſecus oſtendetur, eſſe quoque ut BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, ſint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur eſt ut CK, prima quantitas ad BC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item ut BK, quinta quantitas ad BC, ſecundam, ita BG, ſexta ad BD, quartam; *b* erit ut prima CK, cum quinta BK, ad BC, ſecundam, ita tertia CH, cum ſexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, ſimul æquales ſecundæ BC. Igitur tertia CH, & ſexta BG, ſimul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod eſt eſt propoſitum. b 24 *quint.*

Aliter. *c* Cum triangulo ABC, ſimile ſit triangulum KAC, ſintque homologa latera ipſorum, BC, CA; (Nam eſt ut BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) *d* habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem ejus, quam habet CA, ad BC, *e* habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam protionis CA, ad BC. *f* Quare erit ut triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione oſtendetur eſſe, ut triangulum KBA, ad ABC: ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rurſus eſt, ut KAC, prima quantitas ad ABC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item ut KBA, quinta ad ABC, ſecundam, ita BG, ſexta ad BD, quartam; *g* erit & prima KAC, compoſita cum quinta KBA, ad ſecundam ABC, ut compoſita tertia CH, cum ſexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta ſimul, æquales ſecundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & ſexta ſimul,

c 8. *ſext.* d 19. *ſext.* e 19. *vel* 20. *ſext.* f 11. *quint.* g 24 *quint.*

Digitized by Google

ſimul, æquales quoque erunt quartæ BD. Quod eſt propoſitum.

Aliter. Ut quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, ſecundam quantitatem, ita eſt figura CH, tertia quantitas,
h 19. vel ad figuram BD, quartam quantitatem; *h* cum
20. ſext. utraque proportio ſit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit ut quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, ſecundam quantitatem, ita figura BG, ſexta quantitas,
i 24. quint. ad figuram BD, quartam quantitatem. *i* Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad ſecundam, hoc eſt, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum ſexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet
k 47. primi. ad figuram BD: *k* Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, ſimul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod eſt propoſitum. In rectangulis igitur triangulis, figura quævis &c. Quod erat oſtendendum.

XXX. THEOR. 22. PROPOS. 32.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum unum angulum compoſita fuerint, ita ut homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

TAB. XXV. fig. 122. HAbeant triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturque ad angulum ACD, ita ut latera homologa AB, DC, item AC, DE, inter ſe ſint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ
a 29. primi. ſint AB, DC, *a* erit angulus A, alterno ACD,

æqualis:

æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter ſe quoque exiſtent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipſa *b* erunt inter ſe æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, æqualibus angulis B, & DCE, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc eſt, angulo ACE, æquales. Rurſus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: *c* Sed illi tres æquales ſunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: *d* Atque idcirco BC, CE, unam rectam lineam conſtituent. Itaque ſi duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.

b *6. ſext.*
c *32. primi*
d *14. primi*

THEOR. 23. PROPOS. 33.

xxxij.]

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt.

SInt duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; ſumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem inſiſtant anguli BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico eſſe ex ſententia defin. 6. lib. 5. ut arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum FEG; & ſectorem inſuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad ſectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, *a* applicentur ipſis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipſi BC.

TAB. XXV. fig. 12.
a *1. quart.*

At

At vero GK, KL, ipſi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales ſunt
b 26. tertii. rectæ BC, CI, *b* erunt quoque æquales arcus
c 27. tertii. BC, CI, *c* ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo eſt arcus BCI, ipſius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, ſeu aggregatum angulorum prope centrum D, inſiſtentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex eſt arcus FGKL, ipſius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, ſeu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, inſiſtentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diviſi ſunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales ſecti ſunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero ſi arcus BCI, æqualis fuerit arcui
d 27. tertii. FGKL, *d* neceſſario angulus BDI, angulo FHL, æqualis eſt: Ac proinde ſi arcus BCI, major fuerit arcu FGKL, neceſſario angulus BDI, major eſt angulo FHL, & ſi minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt, vel una excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe
e 6. def. quint. reſpondent. *e* Quare quæ proportio eſt arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, ſecundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

Atque hoc verum etiam eſt de ſpatiis circa centra, hoc eſt, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, ut ſpatium ad centrum D, inſiſtens arcui BAC, ad ſpatium ad centrum H, inſiſtens arcui FEG, ut ex demonſtratione patet. Nam & hæc ſpatia, ſi æqualia ſunt inſiſtunt æqualibus arcubus, & ſi inæqualia, inæqualibus, &c.

Quoniam vero ut angulus BDC, ad angulum
f 15. quint. FHG, *f* ita eſt angulus BAC, ad angulum FEG,

gcum

g cum illi horum ſint dupli, perſpicuum eſt, *h* ita eſſe quoque angulum, BAC, ad angulum FEG, ut eſt arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eiſdem argumentis demonſtrari poteſt, quibus uſi ſumus in angulis ad centra conſtitutis, ſi prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c. g 20. *tertii.* h 11. *quint.*

Quod ſi ad circumferentias conſtituti ſint anguli ejuſmodi BAC, FEG, ut rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non conſtituant angulos in centris verſus arcus BMC, FG; ſumenda erunt ſpatia BDC, FHG; quæ dupla etiam ſunt angulorum ad circumferentias.

Conſtituantur jam in ſegmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, *i* qui æquales erunt, cum inſiſtant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare ſimilia erunt ſegmenta BMC, CNI, *k* atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod ſunt ſuper rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, *l* quæ æqualia quoque ſunt, fient ſectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit ſector BDI, ſectoris BDC, quam eſt multiplex arcus BCI, ipſius arcus BC. Similiter oſtendemus, ſectorem FHL, tam multiplicem eſſe ſectoris FHG, quam multiplex eſt arcus FGKL, ipſius arcus FG. Quoniam vero ſi arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, ſector quoque BDI, ſectori FHL, æqualis eſt, (ut in ſectoribus BDC, CDI, oſtenſum fuit,) & ſi major, major; & ſi minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & ſector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & ſectore FHL, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt: vel una excedent; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. *i* Quamobrem quæ proportio eſt arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, ſecundam magnitudinem, ea erit ſectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad ſectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, &c. Quod demonſtrandum erat. i 27. *tertii.* k 24. *tertii.* l 4. *primi* i 6. *def. quinti.*

Com-

Digitized by Google

Commodius fortaſſe inſtituetur demonſtratio hoc modo. Sumantur (ſaltem cogitatione) quotvis circuli æquales circulo ABC, atque in ſingulis capiantur ſinguli arcus arcui BC, æquales, quibus inſiſtant anguli tam ad centra, quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus inſiſtunt: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, ut eſt multiplex aggregatum omnium arcuum ipſius arcus BC. Deinde ſumantur etiam quotvis circuli æquales circulo EFG, & in ſingulis accipiantur ſinguli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confuſio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quæ neceſſario oritur, quando arcus BC, FG, ſunt magni, & eorum multiplices accipiendi ſunt, ut perſpicuum eſt. Nam ſi arcus eſſent BCI, FGL, quibus inſiſtunt anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circumferentias; non poterunt eorum multiplices ſumi ſine confuſione, ut patet. Hæc autem confuſio vitatur, ſi plures circuli æquales adhibeantur, ut diximus.

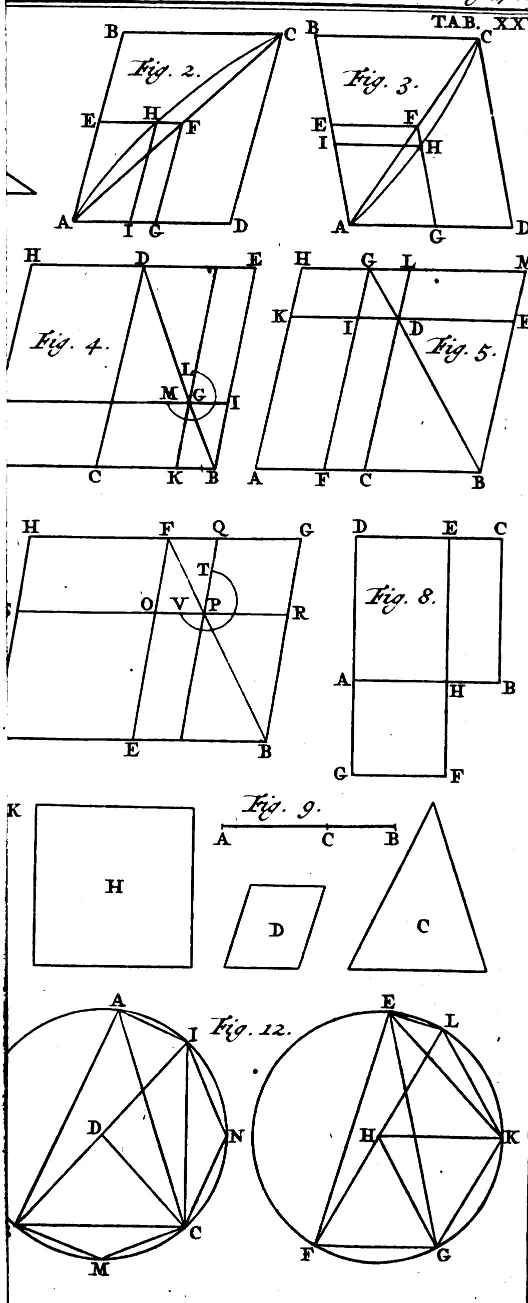
COROLLARIUM.

Hinc manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, ut eſt angulus ad angulum. Utraque enim proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum. k Quare & inter ſe eædem erunt.

k 11. quint.

EUCLI-

TAB. XXV.



Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTUM UNDECIMUM.

Et ſolidorum primum.

POſtquam Euclides in prioribus ſex libris abunde de ea Geometriæ parte diſſeruit, quæ circa plana verſatur, ſibique nomen Geometriæ tanquam proprium, uſurpavit; Nunc aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſive ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata.

DEFINITIO. I.

Solidum eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.

EXplicat autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſive corpus: nempe tertium genus quantitatis; docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita ut tres dimenſiones poſſideat, unam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemve, appellari

 ſolidum,

ſolidum, ſive corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adjicit, ſuperficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

Porro quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imagininemur punctum aliquod è loco in locum moveri; hac enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis eſt magnitudinis expers; ut autem percipiamus ſuperficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in tranſverſum moveri; hac enim deſcribet veſtigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in tranſverſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditam, conſulunt, ut concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter elevari, ſive in tranſverſum moveri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter elevationem illam, ſeu [illegible] ſuperficiei. Hac ergo quantitas, ſolidum, ſive corpus vocatur.

DEFINITIO. II.

Solidi autem extremum, eſt ſuperficies.

QUemadmodum linea finita in extremitat[illegible] cta, ſuperficies vero lineas recipit, ut [illegible] docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum e[illegible] ficiem. Cum enim ſolidum, ſive corpus [illegible]

ex illo motu imaginario ſuperficiei, perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

DEFINITIO. III.

Linea recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

UT linea recta AB, plano CD, inſiſtens, ita ut B, punctum ſit in ſublimi extra planum CD, at punctum A, in ipſo plano, tum demum dicetur recta ſeu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, ut AB, æqualiter inſiſtat plano CD, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH, rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, ut AB, cum una linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamſi cum aliis omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et è contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam, demonſtrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere. TAB. XXVI. fig. 1.

DEFINITIO. IV.

Planum ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

TAB. XXVI. fig. 2. *INſiſtat planum AB, plano CD, itaut linea AQ, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum ſubjectum CD, at EB, in ipſo eodem plano. Sit autem horum planorum communis ſectio EB, quæ, ut demonſtrabitur propoſ. 3. hujus lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis punctis quotcunque G, I; ex ipſis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis: Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient utrobique à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad*

Digitized by Google

ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

DEFINITIO. V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio eſt, cum à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adjuncta: eſt, inquam angulus acutus inſiſtente linea, & adjuncta comprehenſus.

INſiſtat recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita ut punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adjungatur recta EA; eritque neceſſario angulus BAE, acutus, a *cum in triangulo ABE, duo angulii BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adjuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita ut tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.* TAB. XXVI. fig. 3. a 17. primi

DEFINITIO. VI.

Plani ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis ſectionis

punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.

TAB. XXVI. fig. 4.

PLano namque AB, inſiſtat planum CD, ita ut pars ad C, ſit in ſublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipſo plano AB, ſitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum ſectio ſit DE. Si igitur ad DE, communem ſectionem ex ejus puncto F, duæ perpendiculares ducantur, FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita ut tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.

DEFINITIO. VII.

Planum ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

NOn obſcura eſt hæc definitio, præcedente bene intellecta. Unde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cujus angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis receſſerit.

DEFINITIO. VIII.

Parallela plana ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

INtellige, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc eſt, ſive ad dexteram, ſive ad ſiniſtram: & ſive ſurſum, ſive deorſum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad ſini-

Digitized by Google

ſiniſtram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda, quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cujus faſtigium intelligatur abſciſſum, remanentia duo plana non convenient, quamvis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam BACEDF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cujus baſis BCFE, auferaturque faſtigium GAHKDI. Quo facto perſpicuum eſt, reliqua plana GBEK, HCFI, non convenire inter ſe, ſi ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GK, HI, conveniant in faſtigio AD. Ut igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, ut in nullam partem producta inter ſe conveniant. *TAB. XXVI. fig. 5.*

DEFINITIO. IX.

Similes ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

DEFINITIO. X.

Æquales, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QUod ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur ejuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles, verum etiam æquales. Nam

ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo hujuſmodi ſolida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum.

DEFINITIO. XI.

Solidus angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingant, nec in eadem ſunt ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.

DUæ lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum jacentes ad unum punctum conveniunt, efficiunt angulum planum, ut lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſive corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adjungerentur, licet anguli quantitas varieretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ AB, AC, AD, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt AB, AC, jam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui ut mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

TAB. XXVI. fig. 6.

ALI-

ALITER.

Solidus angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur.

Hæc definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cum enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus ſolidus efficiatur, ut ex ipſa figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo recta AB, AD, & angulus DAC, in plano, in quo recta AD, AC, angulus denique CAB, in plano, in quo recta AC, AB, atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad unum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diverſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Unde neceſſe eſt, ut tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, vel laqueari, ad unum punctum convenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Ubi manifeſtum eſt, ſi una earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad invicem inclinatas, & hiantes.

TAB. XXV. fig. 6

DEFINITIO. XII.

Pyramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum conſtituta.

TAB. XXVI. fig. 7, 8, 9.

Videlicet figura ſolida à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtituta appellantur pyramides. Perſpicuum autem eſt, omnia plana, quibus pyramis continetur, eſſe triangula, cum omnia ad unum punctum tendant, excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitum. Hoc enim poteſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem ſumit; ut videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Unde & planum hujuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Ut pyramidis triangularis, præter baſin, triangula ſunt ABD, ACD, BCD: Quadrangulæ vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagonæ denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

DEFINITIO. XIII.

Priſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum adverſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, & parallela, alia vero parallelogramma.

TAB. XXVI. fig. 10, 11, 12.

Figura ſcilicet ſolida, quarum plana adverſa & æqualia, & ſimilia, & parallela ſunt, vel triangula ſint ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH:

EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit, quam columna quædam laterata æqualis craſſitudinis, cujus baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, & parallelæ, ſive hæ ſint triangula, ſive quadrangula, ſive pentagona, &c. Unde tot parallelogramma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſive anguli, in uno quoque oppoſitorum planorum reperiuntur, ut figuræ indicant.

DEFINITIO. XIV.

Sphæra eſt, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat, circumaſſumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum ejus extremum quieſcens revoluta deſcribit circulum: ita & ſemicirculus circa alterum ejus extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Unde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtunt illi lineæ circumvolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiam modo.

Sphæra

Sphæra eſt figura ſolida, una ſuperficie comprehenſa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

DEFINITIO. XV.

Axis autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus convertitur.

DEFINITIO. XVI.

Centrum ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem ſphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expoſitione, dummodo hoc ſolum notetur, omnem diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra revolvatur. Unde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrum ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominavit.

DEFINITIO. XVIII.

Conus eſt, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in

ſe ipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat, circumaſſumpta figura.

Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero major, Oxygonius.

UT ſi triangulum rectangulum ABC, circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram revolutionem expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ continetur duabus ſuperficiebus, circulari una ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit: & curva alia, eaque convexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat. TAB. XXVI. fig. 13, 14, 15.

Quod ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, ut in figura 13. dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Cum enim latera AB, BC, ponuntur æqualia; a *erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquivaleant uni recto, eo quod ABC, rectus eſt, erit angulus BAC, ſemirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quieſcens latus AB, minus fuerit circumducto BC, ut in figura 14. vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim BC, latus latere AB, ſit majus;* b *erit angulus BAC, major angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, ſemi-*

a 5. primi

b 18. primi

ſemirecto major. Similiter BAD, major erit ſemirecto; atque adeo totus CAD, recto major erit. Si denique quieſcens latus AB, majus fuerit circumducto BC, ut in figura 15. appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus, quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum enim la-
c 18 primi *tus AB, majus ſit latere BC, c erit angulus BCA, angulo BAC, major. Quapropter cum hi duo uni recto æquivaleant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, ſemirecto major, ideoque reliquus BAC, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus BAD, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.*

DEFINITIO. XIX.

Axis autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

TAB. XXVI. fig. 13, 14, 15.

UT in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quiſcens AB.

DEFINITIO. XX.

Baſis vero coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

TAB. XXVI. fig. 13, 14, 15.

NImirum circulus CD, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt BC, in ſuperioribus conis. Itaque hujus circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO. XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri, circumaſſumpta figura.

Veluti ſi rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quieſcens AB, circumvolvatur, donec integram expleat revolutionem, appellabitur figura deſcripta DCFE, cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus DE, & CF, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curva, eaque convexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicujus rotundæ. Unde factum eſt, ut Campanus cylindrum appellaverit columnam rotundam. TAB. XXVI. fig. 16.

DEFINITIO. XXII.

Axis autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

Nempe recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri. TAB. XXVI. fig. 16.

DEFINITIO. XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

Quales ſunt circuli DE, & CF, à lateribus AD, BC, oppoſitis deſcripti. TAB. XXVI. fig. 16.

DEFI-

DEFINITIO. XXIV.

Similes coni. & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

RECte Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundum duas dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinem; Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinem ſimiles eſſe demonſtrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri: in conis autem axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, ut axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum revolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum converſiones cylindros efficiunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit ut AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem ut BC, ad FG, a ita dimidia BD, ad dimidiam FH: erit quoque ut AD, EH, ita DB, ad HF: & permutando ut AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectangula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem,

TAB. XXVI. fig. 17, 18.

a 15. quint.

dem, b *propterea quod triangula unum angulum uni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt*, c *ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula vero*, d *eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.*

b 6. ſexti.
c 5. ſexti.
d 34. primi.

DEFINITIO. XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

DEFINITIO. XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

DEFINITIO. XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

H*Æc ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continen-*

tur, æqualia ſint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ ſimplicia à Philoſophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hiſce corporibus aſſimilat.

DEFINITIO. XXX.

[Parallelepipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex adverſo, parallelæ ſunt contenta.]

TAB. XXVII. fig. 1. *Veluti ſolida figura comprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſita AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, ſunt parallela, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehenſa, quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallelogramma, ut demonſtrabitur propoſ. 24. hujus lib.*

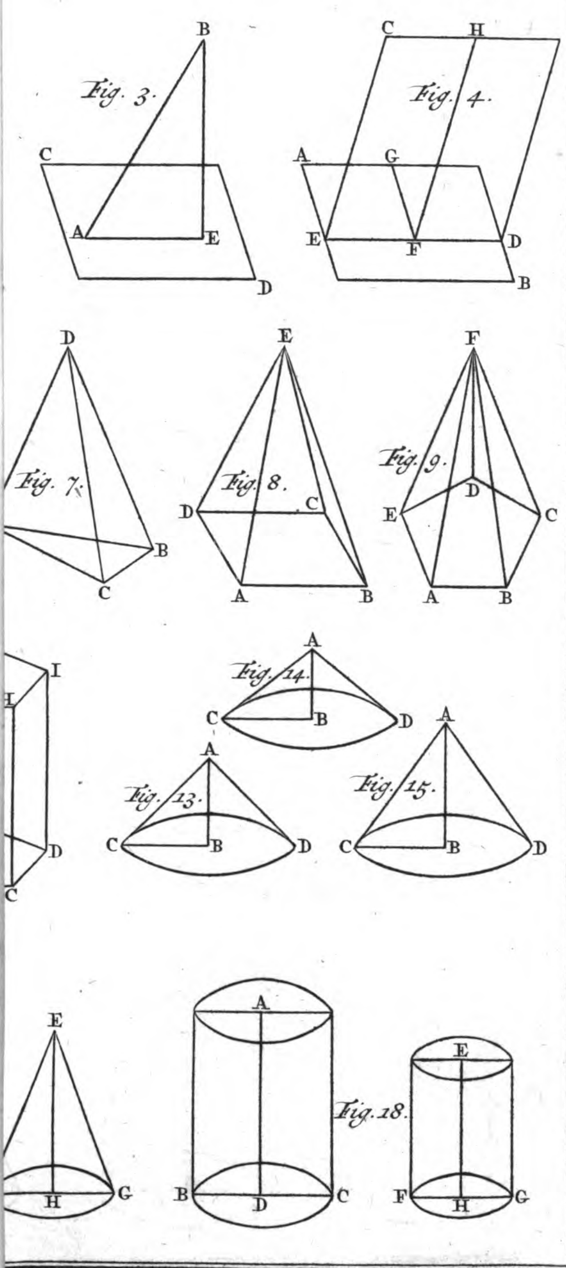
DEFINITIO. XXXI.

[Solida figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.]

DEFINITIO. XXXII.

[Solida figura ſolidæ figuræ viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcrip-

TAB. XXVI.



Digitized by Google

Digitized by Google

ſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.]

Non eſt neceſſe, ut anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, ut omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.

Sit enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in ſubjecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita ut omnia puncta partis AC, in plano DE, jaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. Quod eſt abſurdum, ex pronunciatio 10. lib. 1. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum. *TAB. XXVII. fig. 2.*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in uno ſunt plano. Atque triangulum omne in uno eſt plano.

Rectæ lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, ut- *TAB. XXVII. fig. 3.*

Digitized by Google

utcumque, ducatur recta FG, ut fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in uno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in uno quoque plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano uno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra, exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in uno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra quod fieri non
a 1. und. poſſe, jam ſupra *a* demonſtratum eſt. Quod ſi ejuſdem trianguli pars quidem EFIK, in uno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in uno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique ejuſdem trianguli pars quidem FHKG, in uno concedatur eſſe plano, pars vero EHK, in ſublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in uno plano, partes autem HE, KE, in ſublimi, vel con-
b 1. und. tra. Quæ omnia abſurda ſunt, *b* ut eſt demonſtratum. Quare triangulum EFG, in uno plano exiſtit; eademque eſt ratio in omni alio triangulo.

Quia vero, in quo plano eſt triangulum EFG, in eodem exiſtunt ejus latera EF, EG: In quo
c 1. und. autem ſunt rectæ EF, EG: *c* in eodem ſunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ AB, CD, in uno plano, in quo nimirum triangulum EFG, conſiſtere demonſtravimus. Quocirca ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in uno ſunt plano. Atque triangulum omne in uno eſt plano. Quod erat demonſtrandum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.

TAB. XXVII. fig. 4. SEcent ſe mutuo plana AB, CD, ſitque communis eorum ſectio EF. Dico EF, eſſe lineam

neam rectam. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eoſdem habeant terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, ex 14. pronunciato 1. lib. Communis ergo ſectio EF, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat oſtendendum.

Aliter. Secent ſe rurſus plana AB, CD, ſintque termini ſectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in utroque plano exiſtit, conſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rurſus duæ rectæ EF, EGF, ſuperficiem, cum eoſdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano eſſe credatur, tunc ſi in altero ducatur recta EHF; includent iterum duæ rectæ EF, EHF, ſuperficiem. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo recta EF, in utroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum ſectio eſt.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat. Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit.

RECta linea AB, inſiſtat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum ſectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos eſſe plano, quod per ipſas ducitur, ſeu in quo exiſtunt. Cum enim ſe mutuo ſecent in B; *a* erunt ipſæ in uno plano, quod ſit CEDF. Sumantur inter ſe æquales rectæ BG, BH; item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; & in *TAB. XXVII. fig. 5.* a 2. und

in eodem plano per B, ducatur recta LM, ſecans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in ſublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex
b 15. primi conſtructione ſunt æqualia; *b* & anguli quoque ipſis contenti GBK, HBI, cum ſint ad verticem
c 4. primi B, oppoſiti, æquales: *c* Erunt baſes GK, HI, inter ſe, & anguli BKG, BIH, inter ſe quoque æquales.

d 15. primi Rurſus *d* cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppoſiti ſint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL; trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adjacent æqualia, ex con-
e 26. primi ſtructione. *e* Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex conſtructione; & anguli ipſis contenti ABG,
f 4. primi ABH, æquales, nempe recti, ex hypotheſi, *f* erunt & baſes AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia ſunt; & baſis AH, baſi AG, ex hactenus de-
g 8. primi monſtratis, *g* erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehenſi, æquales.

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia ſint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipſis contenti AKL, AIM, æquales
h 4. primi etiam, ut hactenus demonſtravimus; *h* erunt quoque baſes AL, AM, æquales.

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia ſunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & baſis AL, baſi AM, ex demon-
i 8. primi ſtratis; *i* erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehenſi, æquales; qui cum ſint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum re-

Digitized by Google

ſta LM, quæ in plano ſubjecto ipſam tangit in B; Eademque ratione oſtendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipſam tangent in B, angulos rectos conſtituere, etiamſi inter puncta G, I, & K, H, ductæ ſint, dummodo rectæ GI, KH, jungantur; vel certæ literæ diſponantur, ut prius, quemadmodum in hac figura apparet, ubi eædem ſunt literæ, & tamen LM, non ducitur à ſiniſtra in dexteram, ut in figura quinta, ſed à ſuperiori parte verſus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. hujus lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis ſe mutuo ſecantibus, &c. Quod demonſtrandum erat. *TAB. XXVII. fig. 6.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in uno ſunt plano.

INſiſtat recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, ſe tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum ſectione, ſeu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in uno plano eſſe. *a* Cum enim quælibet duæ in uno ſint plano, propterea quod productæ ad partes B, ſe mutuo ſecent in B; ſint BC, BD, in plano FC; Et ſi fieri poteſt, recta BE, non ponatur in eodem plano, ſed in ſublimi. *b* Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in uno ſunt plano, cum ſe mutuo ſecent in B, ſint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, ſibi mutuo occurrunt in B; neceſſario producta ſe mutuo ſecabunt. *c* Sit ergo eorum communis ſectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; *d* erit propterea & plano FC, per ipſas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos

TAB. XXVII. fig. 7.
a 2. *und.*
b 2. *und.*
c 3. *und.*
d 4. *und.*

Digitized by Google

angulos erit rectæ BG, quæ ipſam in B, tangit, ex defin. 3. hujus lib. Quare recti anguli ABE, ABG, exiſtentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter ſe erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in uno plano FC, exiſtentibus, non erit BE, in ſublimi, ſed in eodem cum ipſis plano. Quocirca ſi recta linea rectis tribus lineis ſe mutuo tangentibus, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

TAB. XXVII fig. 8. SInt duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas eſſe parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. hujus lib. Jam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex conſtructione; & anguli quoque ipſis contenti ABD, GDB, æqua-
a 4. primi les, nempe recti; *a* erunt baſes æquales AD, GB. Rurſus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia ſunt lateribus GD, DA, trianguli GDA.
b 8. primi Eſt autem & baſis communis AG, *b* erunt anguli ABG, GDA, æquales: Eſt autem ABG, rectus, ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus eſt; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos.
c 5. und. *c* Quare rectæ DB, DA, DC, in uno erunt plano, hoc eſt, CD, erit in plano per rectas DB,
d 2. und. DA, ducto: *d* Eſt autem AB, in eodem plano, in

in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, ſint recti; *e*erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum. e 28. *primi*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, ſumantur utcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra, ſecet jam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E, & F, ſitque communis ſectio horum planorum EGF, *a*quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. *b*Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum. *TAB. XXVII. fig. 9.* a 3. *und.* b 10. *prin.*

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SInt parallelæ rectæ AB, CD; ſitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem *TAB. XXVII. fig. 10.*

Digitized by Google

eidem plano EF, eſſe ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit per defin. 3.
a 29. primi hujus lib. angulus CDB, rectus: *a* Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Jam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Conjungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex conſtructione, & anguli quoque ipſis contenti CDB, GBD, æquales, nimi-
b 4. primi rum recti: *b* Erunt baſes CB, GD, æquales; Rurſus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia ſunt lateribus GB, BC, trianguli GBC,
c 8. primi & baſis eſt communis CG. *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehenſi æquales. Eſt autem CDG, rectus ex definitione 3. hujus lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, ſe mutuo ſecantibus in B. (Si namque producerentur DB, CB, ſecarent ſeſe in B, ob angulum CBD,) ad rectos angu-
d 4. und. los exiſtit; *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Eſt autem in hoc
e 7. und. eodem plano recta AB; *e* propterea quod rectæ BD, BC, in eodem ſunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cum puncta B, C, D, exiſtant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex definitione 3. hujus lib. Quare cum AB, recta ſit ad rectas
f 4. und. BG, BD; *f* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc eſt, ad planum EF. Si duæ igitur ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat oſtendendum.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed

ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SInt rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoque eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangentes mutuo in G; *a* erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF, & EF, ſit recta ad planum per GH, GI, ductum; *b* erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum ſint parallelæ CD, EF, ſit autem EF, recta ad planum per GH, GI, ductum; *c* erit etiam CD, recta ad idem planum; *d* Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano, hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XXVII. fig. 11.

a 4. *und.*

b 8. *und.*

c 8. *und.*

d 6. *und.*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SInt rectæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, ſe tangentibus in D; non ſint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim AB, DE, inter ſe æquales, & AC, DF, inter ſe, ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ ſunt & æquales;

TAB. XXVII. fig. 12.

a 33. primi quales; *a* erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, paral-
b 9. und. lelæ & æquales ſint eidem AD, *b* erunt etiam
c 33. primi BE, CF, inter ſe parallelæ & æquales; *c* Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex conſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqua-
d 8. primi lis, ut modo demonſtravimus; *d* Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

xi. PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

TAB. XXVII. fig. 13. Sit à puncto A, in ſublimi ad ſubjectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta utcunque DE, *a* ad quam ex
a 12. primi A, deducatur perpendicularis AF. *b* Et in plano
b 11. primi BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur
c 12. primi GH, *c* ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, eſſe perpendicularem ad planum
d 31. primi ſubjectum BC. *d* Ducta enim in plano BC, per I, ipſi DE, parallela KL, cum DF, ad rectos angulos ſit duabus FA, FH, ex conſtructione,
e 4. und. *e* ac proinde recta ad planum per FA, FH, du-
f 8. und. ctum, *f* erit quoque KI, ad idem planum per
g 2. und. FA, FH, ductum recta. *g* Quoniam vero AI, in eodem eſt cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. hujus lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI,
h 4. und. ad rectos angulos erit duabus KI, IF. *h* Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.

PROBL.

Digitized by Google

PROBL. 2. PROPOS. 12. [xij.]

Dato plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit à dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC, *a* Ex quovis puncto D, in ſublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extenſâ recta per E, & A, *b* ducatur per A, ipſi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam eſſe ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ ſint; & DE, recta ad planum BC, ex conſtructione: *c* erit quoque AF, ad idem. planum BC, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciendum erat. *TAB. XXVII. fig. 14.* a 11. *und.* b 31. *primi* c 8. *und.*

THEOR. 11. PROPOS. 13. [xiij.]

Dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

Sit datum planum AB. Dico à dato ejus puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, *a* quæ in uno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ ſint ad planum AB; erunt per defin. 3. hujus lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos *TAB. XXVII. fig. 15.* a 2. *und.*

Digitized by Google

ctos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. Quod erat demonſtrandum.

Aliter. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ ſint ad idem
b 6. und. planum AB; *b* erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cum tamen conveniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

xiv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

Ad quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela.

TAB. XXVIII. fig. 1. SIt recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela eſſe plana CD, EF. Si enim non credantur eſſe parallela, producta inter ſe con-
a 3. und. venient. Conveniant ad partes C, E, *a* & faciant communem ſectionem rectam lineam GH; In qua ſumpto puncto utcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli IAB,
b 17. primi IBA, recti, in triangulo ABI. *b* Sed & minores duobus rectis ſunt. Quod eſt abſurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter ſe conveniunt. Parallela ergo ſunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

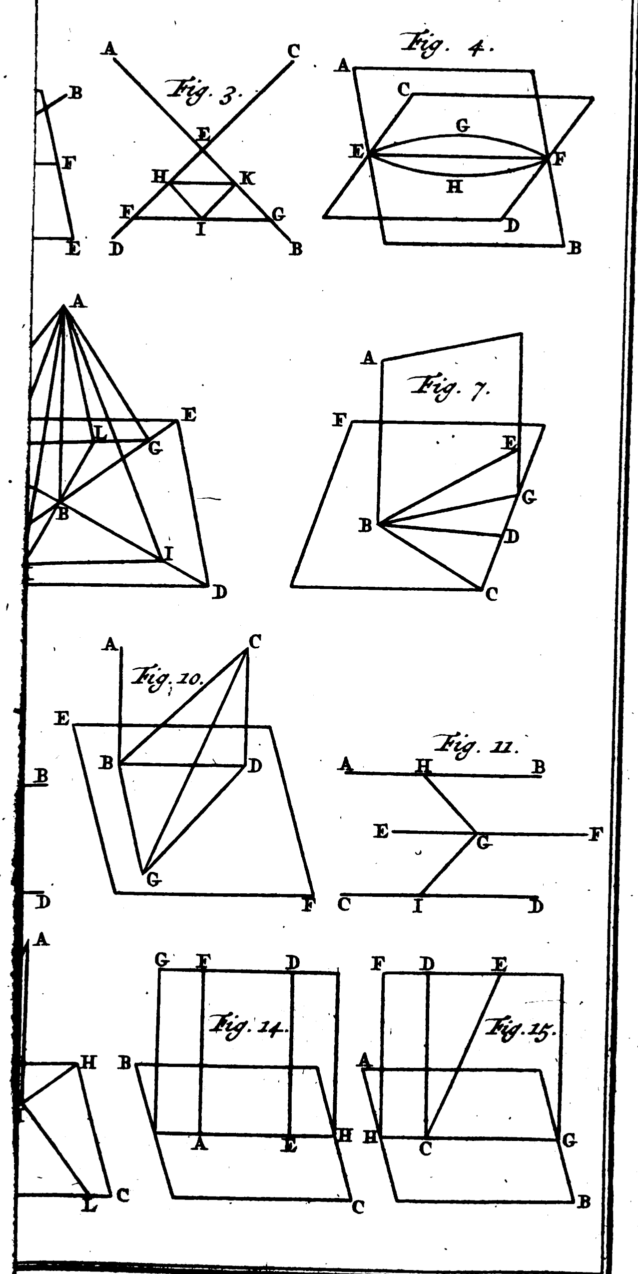
xv. THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano: Parallela ſunt, per quæ illa ducuntur, plana.

TAB. XXVIII. fig. 2. SInt duæ rectæ lineæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, ſe

Digitized by Google

TAB. XXVII.



Digitized by Google

Digitized by Google

ſe tangentibus in D, exiſtentibusque in alio cum illis plano: Dico & plana BC, EF, per ipſas ducta, eſſe parallela. Ex A, *a* enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. *b* Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipſis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ ſunt ipſi DE; *c* erunt & AB, GH, inter ſe parallelæ. *d* Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. hujus lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA, ſit recta duabus AB, AC, *e* recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. *f* Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 11. und.
b 31. primi
c 9. und.
d 29. primi
e 4. und.
f 14. und.

SCHOLIUM.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

Datum planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur utcunque duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, f agatur CE, ipſi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibuſque in alio cum illis plano parallelæ ſint, g parallela erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.

TAB. XXVIII. fig. 3.
f 31. primi
g 15. und.

THEOR.

xvi. THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur: communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

TAB. XXVIII. fig. 4. SEcentur plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GF, eſſe lineas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe convenient, cum ſint in plano EF, ſecante. Conveniant igitur in puncto I. *a 1. und.* *a* Quia ergo tota recta HEI, in uno eſt plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in uno quoque eſt plano, videlicet in CD, producto; convenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare ſi duo plana parallela plano quopiam ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

xvij. THEOR. 15. PROPOS. 17.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.

TAB. XXVIII. fig. 5. REctæ lineæ AB, CD, ſecentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas ſecari proportionaliter, hoc eſt, ſegmenta earum inter dicta plana intercepta eſſe proportionalia, ut quidem LM, ad MN, ita eſſe OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & conjungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, *a 2. und.* in eodem plano GH. *a* Eritque triangulum LNQ, in uno plano: ſimiliter triangulum LOQ, in uno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, *b 16. und.* ſecantur plano trianguli LNQ, *b* erunt commu-

nes

nes ſectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. c Quam ob rem erit ut LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item ut LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde ut LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum. c 2. ſexti.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviij.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIt recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, eſſe recta ad idem planum CD. Ductum enim ſit per AB, planum EF, ſecans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta FG, a ducatur in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ ſunt; & AB, ponitur recta ad planum CD; b erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem ſectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. hujus lib. Similique argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum. TAB. XXVIII. fig. 6. a 31 primi. b 8. undec.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis

Digitized by Google

etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

TAB. XXVIII. fig. 7. Sint duo plana AB, CD, ſe mutuo ſecantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum ſectionem EF, rectam quoque eſſe ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes ſectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta eſt, aut non. a 4. und. Si recta eſt EF, ad BF, DF, *a* recta quoque erit ad planum GH, quod per ipſas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum ſit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus ſectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. hujus lib. Idem concludes ſi EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. hujus lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem ſectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, eſſe credab 11. primi tur recta; *b* ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem ejus ſectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem ejus ſectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus ſectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. hujus lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri c 13. und. non poſſe ſupra *c* demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 18. PROPOS. 20. XX.

Si ſolidus angulus tribus angulis planis continеatur: Ex his duo quilibet ut ut aſſumpti tertio ſunt majores.

CONtineatur angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo eſſe majores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuum eſt, quoſvis duos majores eſſe reliquo: Si vero duo tantum ſint æquales, & tertius utrovis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo majores eſſe. Quod ſi unus, videlicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſive æquales, ſive inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe majorem. Dico jam hoc angulo maximo BAC, majores quoque eſſe angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto *a* fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ, AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; conjunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionem æquales; *b* erunt baſes BD, BE, æquales. *c* Quia vero latera DB, DC, majora ſunt latere BC; ſi demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, major quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia ſint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & baſis CD, major baſe CE; *d* erit angulus CAD, angulo CAE, major. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, majores duobus angulis CAE, BAE, hoc eſt, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo majores erunt reliquo non maximo. Quocirca ſi ſolidus angu-

TAB. XXVIII. fig. 8.

a 23. primi

b 4. primi

c 20. primi

d 25. primi

angulus tribus angulis planis continetur, &c. Quod erat oſtendendum.

xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

TAB. XXVIII. fig. 9. SIt angulus ſolidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores eſſe quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt conſtituti tres anguli ſolidi B, C, D, quorum quilibet ſub tribus angulis planis continetur, nempe B, ſub CBA, ABD, DBC. At C, ſub BCA, ACD, DCB: D, vero ſub CDA, ADB, BDC. *a 20. und.* *a* Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, majores ſunt angulo CBD; ſimiliterque duo anguli BCA, ACD, majores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, majores angulo CDB: erunt ſex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, majores. *b 32. primi* *b* Hi autem tres æquales ſunt duobus rectis. Illi ergo ſex duobus rectis erunt majores. Cum igitur ſex illi, una cum tribus ad A, æquales ſint ſex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, *c 32. primi* (*c* ſunt enim anguli cujuslibet trianguli duobus rectis æquales) ſi auferantur ſex illi duobus rectis majores, relinquentur tres ad A, ſolidum angulum conſtituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo ſolidus angulus, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet aſſumpti reliquo ſint majores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales; fieri

ſieri poteſt; ut ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.

SInt tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo ſint majores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua eſſe majores. Nam hoc poſito, *a* ex ipſis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, majores ſint, quam HI, ita oſtendetur. *b* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita ut fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compoſitus; quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur AK, ipſi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; *c* erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia ſunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, major angulo C, propterea quod duo anguli DAE, & B, majores ponuntur angulo C; *d* erit & baſis EK, major baſe HI: *e* ſunt autem rectæ ED, DK, majores recta EK. Igitur multo majores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI. Quod eſt propoſitum.

TAB. XXVIII. fig. 10.

a 22. *primi*
b 23. *primi*
c 4. *primi*
d 24. *primi*
e 20. *primi*

Cadat deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE: quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta KD. *f* Erit, igitur, ut prius KD, ipſi FG, æqualis. *g* Quoniam vero rectæ ED, DK, majores ſunt recta KE, & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & con-

TAB. XXVIII. fig. 11.

f 4. *primi*
g 20. *primi*

 ſtructio-

Digitized by Google

ſtructione; erunt quoque ED, DK, majores duabus CH, CI: *b* Hæ autem majores ſunt, quam HI. Igitur multo majores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI. Quod eſt propoſitum.

b 20. *primi*

TAB. XXIX. fig. 1.

Cadat poſtremo AK, ad partes AE, ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum eveniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt majores. Ponaturque rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. *i* Erit igitur, ut prius, KD, ipſi FG, æqualis. *k* Quoniam vero duæ DE, DK, majores ſunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoque DE, DK, majores quam CH, CI: *l* Hæ autem majores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt majores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æquales ipſi FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI, quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, majores eſſe, quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, majores, quam DE, ſi angulo C, ad FB, conſtituatur angulus æqualis, &c. *m* Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonſtrandum erat.

i 4. *primi*
k 21. *primi*
l 20. *primi*
m 22. *primi*

TAB. XXIX. fig. 2.

Aliter. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; *n* erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua majores. Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & tertius minor; *o* erunt quoque duæ illorum baſes æquales, *p* & baſis tertii utraque minor: Quare rurſus quælibet duæ majores erunt reliqua. Quod ſi unus eorum, nempe A, ſit maximus, ſive reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſive inæquales; *q* erit quoque baſis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, majores erunt quam HI: Item, DE, HI, majores quam FG. Dico jam

n 4. *primi*
o 4. *primi*
p 24. *primi*
q 24. *primi*

&

Fig. 3.

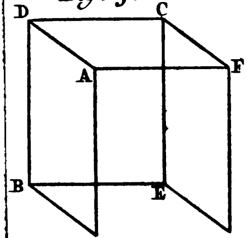
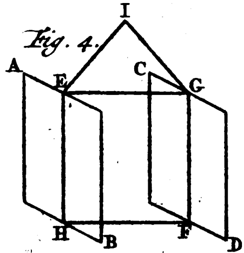


Fig. 4.



. 6.

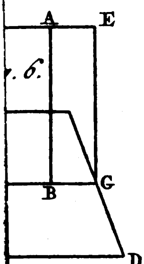
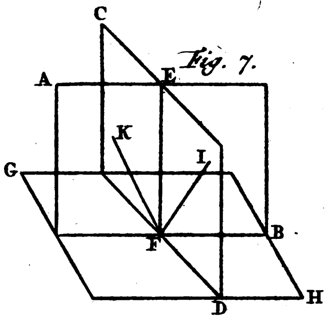


Fig. 7.



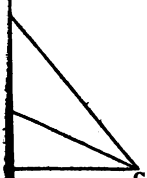
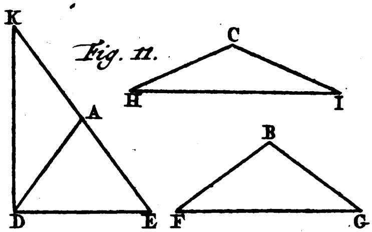
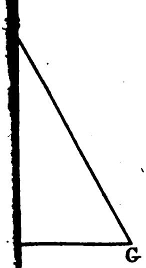
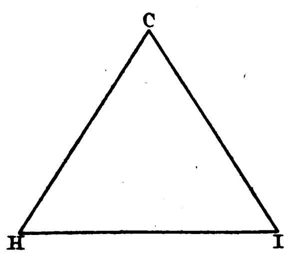


Fig. 11.







Digitized by Google

& rectas FG, HI, majores eſſe recta DE. *r* Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipſi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, tranſit circumferentia circuli ex A, ad intervallum AD, deſcripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, majores ponuntur angulo DAE, & B, æqualis eſt angulo DAK, per conſtructionem; erit angulus C, major reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli AKD, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; *s* erit baſis DK, baſi FG, æqualis. Rurſus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia ſunt lateribus AK, AE, trianguli AKE, & angulus C, oſtenſus major angulo KAE; *t* erit & baſis HI, major baſe KE. Quare cum DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG, erunt FG, HI, majores quam DK, KE. *u* Sed DK, KE, majores ſunt, quam DE. Igitur multo majores erunt FG, HI, quam DE. Quod eſt propoſitum.

r 23. primi
s 4. primi
t 24. primi
u 20. primi

PROBL. 3. PROPOS. 23. xxiij.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt majores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

7 et 8. XXIX. fig. 3.

SInt tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, ut quiſlibet duo ſint majores reliquo. Oportet jam ex tribus angulis A, B, C, angulum ſolidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis ſint æquales. Ponantur ſex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; ſubtendanturque

Digitized by Google

k 22. *und.* turque baſes DE, FG, HI. *a* Fieri ergo poteſt, ut ex DE, FG, HI, triangulum conſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triangulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ
b 5. *quart.* FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. *b* Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cujus centrum N, à quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. major quælibet ductarum ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum eſt oxygonium, ut ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. conſtat. Si igitur AD, AE, majores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, trianguli NKL; & baſis DE,
c 8. *primi* baſi KL, æqualis: *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex corol. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores ſint AD, AE, quam NK, NL, abſcindantur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur eſt ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter ſe, & conſequentia ſint inter ſe æqualia; erunt latera NK, NL, tri-
d 2. *ſext.* anguli NKL, ſecta proportionaliter, *d* ac proinde
e 29. *primi* OP, ipſi KL, parallela erit. *e* Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangu-
f 4. *ſext.* lum. *f* Igitur erit ut NK, ad KL, ita NO, ad
g 14. *quint.* OP. Eſt autem NK, major quam NO. *g* Igitur & KL, hoc eſt, DE, quæ æqualis eſt ipſi KL, major erit, quam OP. Quocirca cum latera

tera AD, AE, trianguli ADE, ſint æqualia la-
teribus NO, NP, trianguli NOP; & baſis DE,
major baſe OP, *h* erit & angulus A, major an- *h 25. primi*
gulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo
LNM; & angulus C, angulo MNK, major eſſe
oſtendetur. Cum igitur tres anguli ad N, qua-
tuor ſint rectis æquales, ex corol propoſ. 15.
lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, majores qua-
tuor rectis. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim
quatuor rectis minores. Non igitur minores ſunt
AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales.
Igitur majores.

Cadat deinde centrum N, in latus LM, quod *TAB.*
tum continget, quando triangulum KLM, an- *XXIX.*
gulum LKM, habuerit rectum, ut ex eodem *fig. 4.*
corol. propoſ. 5. lib. 4. manifeſtum eſt. Si igi-
tur AD, AE, dicantur eſſe æquales ipſis NK,
NL; erunt quoque BF, BG, æquales eiſdem
NK, NL. Cum ergo NK, æqualis ſit ipſi NM;
æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Poſita autem
fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æ-
quales quoque ſunt rectæ FG. *i* Sunt autem & *i 20. primi*
majores BF, BG, quam FG. Quod eſt abſur-
dum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis
NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credan-
tur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG,
minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æ-
qualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG,
quam recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG,
æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt
recta FG. Quod eſt abſurdum, *k* cum ſint ma- *k 20. primi*
jores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam
NK, NL; ſed neque æquales: Igitur majores.

Cadat poſtremo centrum N, extra triangulum *TAB.*
KLM, infra latus LM, quod demum accidet, *XXX.*
quando angulus LKM, fuerit obtuſus, ut ex *fig. 1.*
corol. dicto propoſ. 5. lib. 4. liquet. Si igitur
dicantur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL;
cum & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis;
l erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem *l 8. primi*
ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit.

Digitized by Google

Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo majores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit major. Rurſus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æ-
m8. primi qualis; *m* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & majorem oſtendimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quam NK, NL; ſi abſcindantur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonſtrabitur, ut in primo caſu, angulus A, major angulo ONP; & eadem ratio-
n23. primi ne angulus C, major angulo KNM. *n* Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipſis AD, AE, & connectantur OQ, OR, cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, tranſit circumferentia circuli ex N, ad intervallum NO, deſcripta, cum æqua-
[illegible] primi les ſint rectæ NO, NP, NQ. *o* Quare cum angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, major erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis,
p 4. primi per conſtructionem; *p* erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa jam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR, & angulus LKM, major angulo QOR, ut oſten-
q24. primi dimus: *q* erit baſis LM, hoc eſt, FG, major baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & baſis FG, major baſe QR;

r erit

r erit angulus B, major angulo QNR. Ruſſus r 25. *primi*
quia angulus QNQ, angulo A; & angulus QNR,
angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus
QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C,
majores ponuntur angulo B. Igitur & angulus
QNR, major erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit major angulo QNR.
Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK,
NL; ſed neque æquales: Igitur majores.

Jam vero, cum rectæ AD, AE, majores ſint *TAB.*
rectis NK, NL, ubicunque centrum N, exiſtat; *XXIX.*
poſſit recta AD, plus quam recta NK, quadrato *fig.* 3. 4.
lineæ T, per lemma annexum, ita ut quadratum *TAB.*
rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, *XXX.*
& T. s Ex centro N, excitetur ad planum cir- *fig.* 1.
culi KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqua- s 12. *und.*
lis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli
KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3.
hujus lib. ad rectas NK, NL, NM, t ac proin- t 47. *primi*
de quadratum rectæ VK, quadratis rectarum
KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt
inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac
propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Ruſſus
quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia
ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti; u erit ba- u 4. *primi*
ſis VK, æqualis baſi VL; Atque eadem ratione
rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM,
æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta
VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK,
VL, VM, æquales ſunt rectæ AD; & ob id,
rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem,
cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia
ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; & baſis
KL, baſi DE; x erit angulus KVL, angulo A, x 8. *primi*
æqualis. Non ſecus demonſtrabimus, angulum
LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo
C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus V,
conti-

continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus poteſt, quam minor.

TAB. XXX. fig. 2. *Sint data duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, major, oporteatque invenire, quo AB, plus poſſit quam C. Diviſa AB, bifariam in D, deſcribatur ex centro D, & intervallo DA,*
a 1. quart. *vel DB, ſemicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, jungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ*
b 31. tertii. *EB. b Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus*
c 47. primi *ſit; c erit quadratum ex AB, æquale quadratis AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum.*

xxiv. THEOR. 21. PROPOS. 24.

Si ſolidum parallelis planis contineatur; adverſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia & æqualia.

TAB. XXIX. fig. 5. Sit parallelepipedum ABEF; (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum juxta defin. 30. hujus lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum adverſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quævis oppoſita plana eſſe parallelogramma ſimilia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, ſecentur plano
a 16. und. AC; a Erunt communes ſectiones AB, CD, paral-

Digitized by Google

parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, ſecentur plano AC; erunt communes ſectiones AD, BC, parallelæ. Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera ABCD. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico jam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ ſint rectis DC, CE, & non in eodem plano, ſed in oppoſitis; *b* erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. *c* Quoniam vero AB, ipſi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipſi CE, in parallelogrammo BE, æqualis eſt; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE. Ac propterea ut BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de cauſa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis jam diametris AH, DE, *d* cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia ſint lateribus DC, CE, trianguli DCE; *e* & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut oſtenſum eſt, *f* erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter ſe. *g* Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia ſint parallelogrammorum BG, CF, inter ſe æqualia. Similiter demonſtrabimus ſimilia & æqualia eſſe parallelogramma oppoſita AC, GE; & AF, BE. Si ſolidum ergo parallelis planis contineatur, adverſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 10. *und.*
c 34. *primi*
d 34. *primi*
e 10. *und.*
f 4. *primi*
g 34. *primi*

THEOR. 22. PROPOS. 25. XXV.

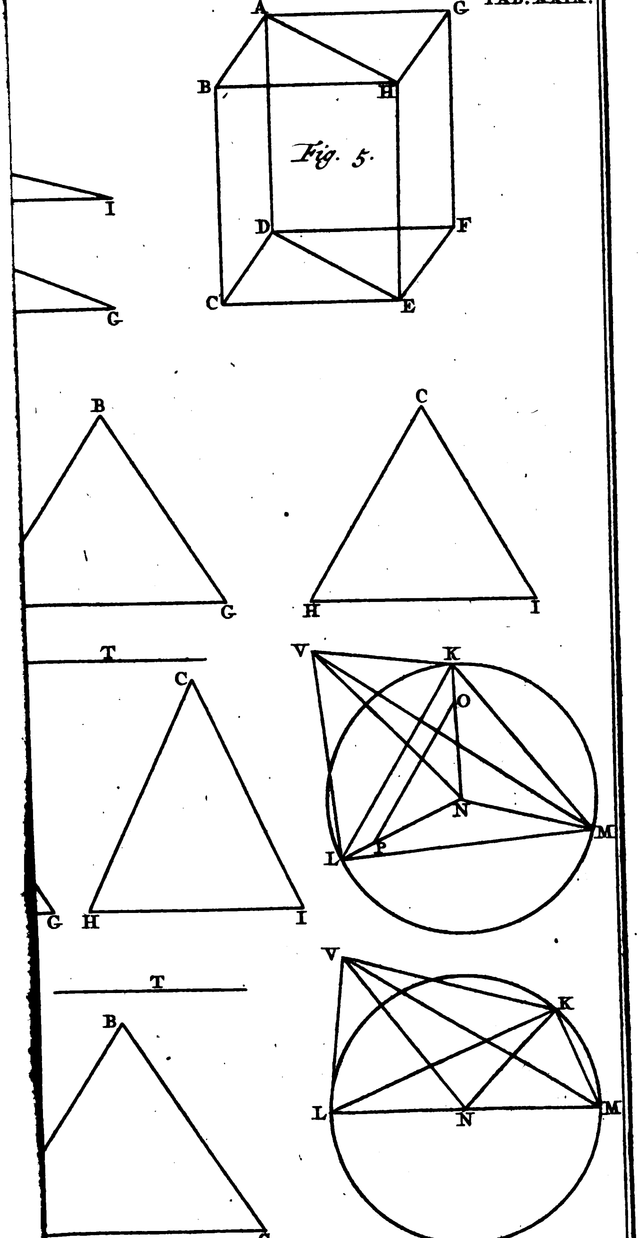
Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur adverſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

SEcetur parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppoſitis planis AD, BC. Dico ut

TAB. XXX. *fig.* 3.

eſt baſis AG, ad baſin BG, ita eſſe ſolidum AEFD, ad ſolidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in utramque partem quantumlibet, ſumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipſi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipſi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per ſcholium propoſ. 15. hujus lib. Quoniam igitur ſolidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypotheſi; a 24. und. ipſum parallelepipedum erit, ex definitione, *a* habebitque plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BMRC, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF; habebuntque plana oppoſita, parallelogramma ſimilia, & æqualia. b 36. primi *b* Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX, cum ſint ſuper æquales baſes AE, AK, KL, c 29. primi æqualia ſunt; & ſimilia quoque *c* cum anguli unius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & ſimilia ſunt parallelogramma AY, KZ, La. Cum igitur æqualia quoque ſint, & ſimilia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD, & tribus planis LX, La, LQ, d 24. und. ſolidi KLQP: *d* Sunt autem tria in utroquoque ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodem, nempe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF, &c. Igitur per defin. 10. hujus lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD. Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG, (multiplex

TAB. XXIX.



Digitized by Google

Digitized by Google

tiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BG, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis major eſt baſe, ſolidum quoque ſolido majus eſt; & ſi minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinem, ita ſolidum AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, ut eſt baſis DY, ad baſim CY, & ut baſis AY, ad baſin BY, & ut baſis DG, ad baſin, CG. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvi.

Ad datam rectam lineam, ejuſque punctum angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

Sit ad punctum A, in data recta AB, conſtituendus angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano exiſtentibus. *a* Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG; connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abſcindatur AH, æqualis ipſi CD, *b* fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rurſus in plano per AH, AI, ducto conſtituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto exiſtit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. *c* Ex L, ve- *TAB. XXX. fig. 4.* *a 11. und.* *b 23. primi* *c 12. und.*

ro

ro ad planum, in quo ſunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipſi FG, æqualis ponatur, & conjungatur recta KA. Dico angulum ſolidum A, contentum tribus angulis HAI, HAK, KAI, æqualem eſſe dato angulo ſolido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia ſint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per conſtructionem; *d* Erunt baſes HL, DG, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales ſunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia ſint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per conſtructionem; *e* æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia ſunt lateribus GD, GF; & anguli, HLK, DGF, recti ex defin. 3. hujus lib. *f* erunt & baſes HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex conſtructione, (cum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos, ex defin. 3. hujus lib. *g* erunt baſes AK, CF, æquales.) *h* Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF, recti ex defin. 3. hujus lib. *i* Erunt baſes IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; *k* erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus. Atque proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, ejuſque punctum, angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

d 4. primi
e 4. primi
f 4. primi
g 4. primi
h 8. primi
i 4. primi
k 8. primi

PROBL.

PROBL. 5. PROPOS. 27. xxvii.

A Data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SIt à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, ejuſque punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita ut tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis, ECG, GCF, FCE. Deinde ut eſt CF, ad CG, *b* ſic fiat AB, ad AI, & ut CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, ut CF, ad CE, ita AB, ad AH. Poſt hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterque poſitum. Cum enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe ut BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione, erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterque poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterque poſita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. *c* Sunt autem tria cujuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſex planis ſolidi CD: Ac proinde ex defin. 9. hujus lib. ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſolida AK, CD. A data ergo recta linea dato ſolido parallelepipedum ſimile, & ſimiliter poſitum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

TAB. XXX. fig. 5.
a 26. und.
b 12. ſext.
c 24. und.

Digitized by Google

xxviij. ## THEOR. 23. PROPOS. 28.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios adverſorum planorum: Biſariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

TAB. XXX. fig. 6. Sit parallelepipedum AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonii, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur utraque CD, GF, parallela eſt, *a* & æqualis ipſi AE, cum ſint parallelogramma CE, GE; *b* erunt & inter ſe parallelæ, & æquales CD, GF. *c* Ac proinde, quæ ipſas conjungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in uno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, ſecare biſariam parallelepipedum AB. *d* Cum enim plana AH, EB, ſint parallelogramma æqualia, & ſimilia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter ſe: ſunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED, DBF, proportionalia. *e* Igitur ſimilia quoque erunt dicta triangula. *f* Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale ſit & ſimile parallelogrammo CB; & AD, ipſi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, priſmatis ACGFED, æqualia & ſimilia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, priſmatis HGCDBF, proptereaque priſmata æqualia erunt, ex defin. 10. hujus lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, ſectum erit parallelepipedum AB, biſariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 34. primi
b 9. und.
c 33. primi
d 24. und.
e 6. ſext.
f 24. und.

xxix. ## THEOR. 24. PROPOS. 29.

Solida parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſi-

Digitized by Google

inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia.

SUper baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia. *a* Cum enim æqualia ſint parallelogramma AL, AM, ſuper eadem baſi AE, & in eiſdem parallelis conſtituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ in corollario 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. *d* Rurſus parallelogrammum AC, æquale eſt & ſimile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipſi LG, æquale eſt cum baſes IK, LM, ſint æquales. (*f* Nam cum rectæ, IL, KM, æquales ſint ipſi AE, erunt quoque inter ſe æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. hujus lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XXX. fig. 7.

a 35. *primi*

b 34. *primi*

c 4. *ſexti*

d 24. *und.*

e 36. *primi*

f 34. *primi*

Digitized by Google

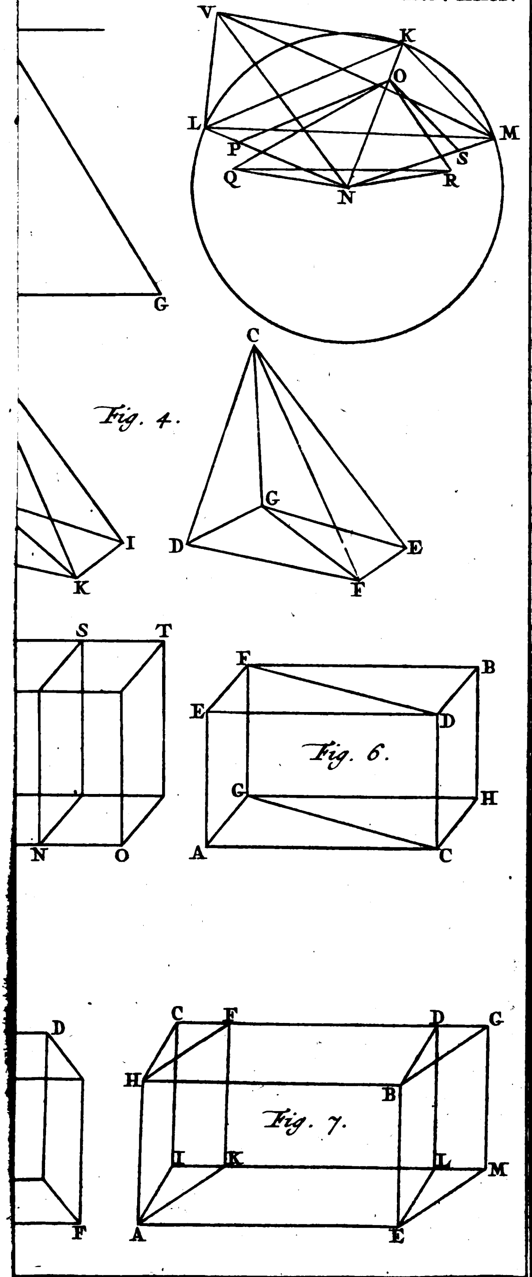
XXX. THEOR. 25. PROPOS. 30.

Solida parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

TAB. XXXI. fig. 1. SUper baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neque CI, GD, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, eſſe æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem, parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, ſecet EM, LF, protractæ in punctis N, O; Et ID, eaſdem in punctis P, Q; adjunganturque rectæ AN, KO, HP, BQ. *a* Quia igitur *a 34. primi* rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. *b* Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & *b 33. primi* æquales, ideoque parallelogrammum eſt HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum eſt APQK. *c* Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale *c 29. und.* eſt parallelepipedo APQK, cum utriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſunt in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, quum utriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter ſe ſun

Digitized by Google

TAB. XXX.



Digitized by Google

Digitized by Google

ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſim, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 26. PROPOS. 31. xxxi. xxxij.

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SUper æquales baſes AB, CD, in eadem altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia; Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. hujus lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. hujus lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia, tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, *b* tam autem illa, quam hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Erunt,

TAB. XXXI. fig. 2.

b 24. und.

Erunt, per defin. 10. hujus lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe æqualia.

Conveniant rectæ DK, TS, productæ in d, & IQ, XY, in e, compleaturque parallelepipedum QdgV, Item HI, bV, protractæ conveniant in a; & OD gR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRa. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, QdgV, eandem habent baſin KV, ſuntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, dX, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, Kd, RT, Rg, QY, Qe, VX, Vb, collo-
c 29. und. cantur in eiſdem rectis dT, eX, c ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV; parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QdgV.

d 35. primi d Quoniam vero parallelogramma KT, Kg, æqualia ſunt inter ſe; & KT, æquale eſt ipſi LG, erit & Kg, ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, æquale; cum baſes LG, CD, ponantur æquales.
e 7. quint. e Quare erit, ut CD, ad DR, ita Kg, ad DR:
f 25. und. f Ut autem CD, baſis ad baſin DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KIaR; cum parallelepipedum CHaR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, aR, parallelo. Et eadem ratione ut Kg, ad DR, ita eſt ſolidum QdgV, ad ſolidum IKRa; cum & parallelepipedum Idga, ſecetur
g 9. quint. plano KV, oppoſitis planis Da, db, parallelo. g Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, QdgV, cum eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRa, nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, Kg, ad eandem baſin DR. Quare cum parallelepipedum QdgV, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.

TAB. XXXI. fig. 3. Sint jam neque inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB, neque CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares: h Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT,
h 11. und. NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares;

lares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis, CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qa. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cum ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Ya, aZ, ZX, ut fiant parallelepipeda ETVF, HZaI, quæ cum ſint ejuſdem altitudinis, habeantque inſiſtentes lineas perpendiculares, erunt inter ſe æqualia, ut oſtenſum eſt. *i* Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat baſin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZaI, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemque altitudinem poſſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque oſtendetur, ſi unius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat. i 29. und / 30. und.

SCHOLIUM.

Solida parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin.

Si enim unum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine p fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum. p 31. und.

Quod ſi in eadem ſint altitudine, & baſis unius credatur major baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum ejuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

xxxiij. THEOR. 27. PROPOS. 32.

Solida parallelepipeda ſub eadem altitudine, inter ſe ſunt, ut baſes.

TAB. XXXI. fig. 4. Sint duo parallelepipeda ABCD, EFGH, ejuſdem altitudinis ſuper baſes AB, EF. Dico eſſe ſolidum ab ſolidum, ut eſt baſis ad baſin. *a 45. primi* *a* Super rectam enim EK, conſtruatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui ſit æqualis angulo ENF. Conſtituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propoſ. lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum *a 31. und.* IFLH; *a* erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales baſes, per conſtructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex *b 7. quint.* hypotheſi. *b* Quare erit ut ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ita ſolidum ABCD, ad idem *c 25. und.* ſolidum EFGH: *c* Eſt autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ut baſis IK, hoc eſt, illi æqualis baſis AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidum ABCD, erit ad ſolidum EFGH, ut baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

xxxvi. THEOR. 28. PROPOS. 33.

Similia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

TAB. XXXI. fig. 5. Sint ſimilia parallelepipeda ABCD, FEGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, eſſe

eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & ſit IL, æqualis ipſi EK, vel GR; Item DI, ad M, & ſit IM, æqualis ipſi HK, vel GO; Item BI, ad N, & ſit IN, æqualis ipſi KF, vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia ſunt lateribus GR, GO; & anguli contenti æquales, cum angulus LIM, ſit æqualis angulo AID, *a* qui ob ſimilitudinem parallelepipedorum æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, ſimilia, & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, ſimilia ſunt, & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: *b* Sunt autem tria cujuſque ſimilia & æqualia tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt & ſimilia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. hujus lib. Rurſus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, eſt ut AI, ad EK, hoc eſt, ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt, ad IM; & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. *c* Ut autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrammum AD, ad DL; Et ut DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit ut AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. *d* Sed ut AD, baſis ad DL, baſin, ita eſt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut baſis DL, ad baſin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & ut baſis BL, ad baſin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum

a 15. primi

b 24. und.

c 1. ſext.

d 32. und.

Digitized by Google

LMBP, & parallepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc eſt, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad ſecundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. *e* Ut autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin DL; *f* Et ut AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione laterum homologorum. Quod erat demonſtrandum.

e 32. und.
f 1. ſext.

COROLLARIUM.

Ex hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, ut eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundum. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex defin. 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimirum laterum homologorum.

xxxiv. xxxv.

THEOR. 29. PROPOS. 34.

Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; illa ſunt æqualia.

TAB. XXXI. fig. 6.

SInt æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ſolidi ADCB. Sint enim primum inſiſtentes lineæ

AI,

Digitized by Google

AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita ut AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. hujus lib. oſtendimus. Quare erit, ut baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

Quod ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, major, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. hujus lib. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; *a* erit ut ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: *b* Ut autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL, ut ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione baſis KN, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: *c* Sed ut KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit ut baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

TAB. XXXI. fig. 7.

a 7. *quint.*

b 32. *und.*

c 1. *ſext.*

Sint jam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. *d* Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

TAB. XXXI. fig. 6.

d 31. *und.*

Quod ſi altitudo EK, major fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH. Quia igitur

TAB. XXXI. fig. 7.

ex

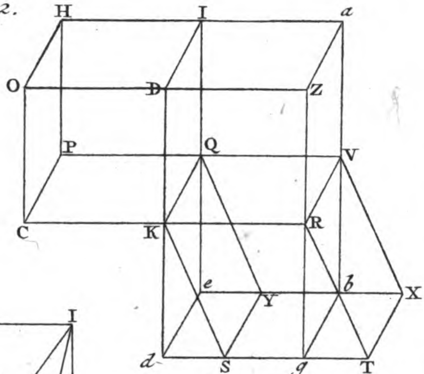
ex hypotheſi eſt, ut baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad
e 32. und. EL, ipſi AI, æqualem; e Ut autem baſis AD, ad baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales po-
f 1. ſext. nantur. f Et ut EK, ad EL, ita eſt, KN, ad
g 32. und. LN; g Ut autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, cum ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit ut ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita ſolidum
h 9. quint. EHGF, ad idem ſolidum EHML; h ideoque æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

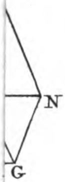
TAB. XXXII. fig. 1. Sed proponantur jam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non ſint perpendiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum baſis
n 11. und. AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; n Item à punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qa, GZ: connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Za, XZ, Ya: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, ut baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI. Cum enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi,
i 29. vel 30. und. ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, i quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale ſolido XaGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XaGH, æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH; erit, ut jam demonſtratum eſt, ut baſis CD, ad baſin
k 34. und. GH, hoc eſt, ut baſis AB, ad baſin EF, k ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

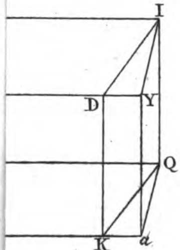
Sint jam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, ut prius; Cum ſit ut baſis AB, ad baſin EF,

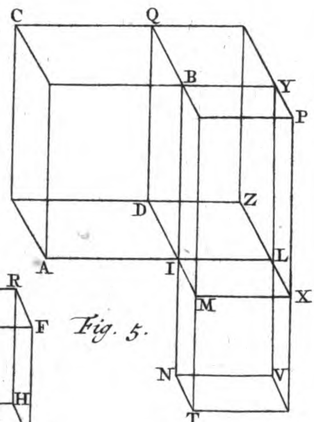
TAB. XXXI.

Fig. 2.











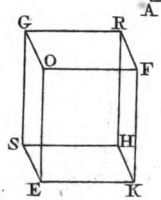
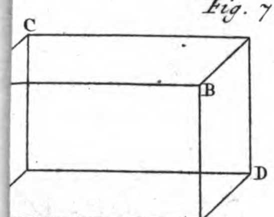
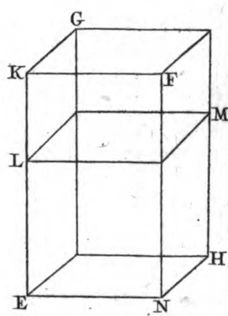


Fig. 5.

Fig. 7.





Digitized by Google

Digitized by Google

EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; *l* Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque ut baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin GH, ſolidi XaGH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt, ut jam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, XaGH. *m* Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur quoque æqualia erunt parallelepipeda ABCD, EFGH: Idemque oſtendetur, ſi inſiſtentes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quamobrem, Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.

l 14. und.

m 29. vel 30. und.

SCHOLIUM.

Omnia hæc quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29, 30, 31, 32, 33, & 34. conveniunt quoque priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædictæ hypotheſes ſerventur. Nam ſi duobus priſmatis ejuſmodi ejuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, apponantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda ejuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtentia. m *Quare æqualia erunt ejuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.*

m 29, 30. vel 31. und.

Rurſus, ſi duobus priſmatis prædictis ejuſdem altitudinis, & ſuper diverſas baſes conſtitutis adjiciantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo parallelepipeda ejuſdem altitudinis. n *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, ut baſis ad baſin;* o *Atque adeo priſma ad priſma, nempe dimidium unius parallepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet unius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.*

n 32. und.
o 15. quint.

Prate-

Præterea, ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, p 33. und. *conſtituentur duo parallelepipeda ſimilia, p quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia,* q 15. quint. *q cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.*

Denique ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adjungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem r 34. und. *altitudinum cum priſmatis. r Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eædem ſint, vel certe triangula earum* s 15. quint. *dimidia s eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.*

xxxvii. THEOR. 30. PROPOS. 35.

Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendunt.

TAB. XXXII. fig. 2. SInt duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana ſublimes rectæ lineæ, AG, DH, ita ut angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, ſit æqualis: à ſumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur

tantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adjungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, eſſe æquales inter ſe; Nam ſi AG, DH, ſunt inæquales auferatur à majori AG, ipſi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipſi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ ſunt GI, LM, & eſt GI, ad planum anguli BAC, recta; *a* erit quoque LM, ad idem planum recta: ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. hujus lib. *b* Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; *c* Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus ſit, ex conſtructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CM, ML: *d* At quadratis rectarum CM, ML, æquale eſt quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus ſit per defin. 3. hujus lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CL; *e* Ac proinde angulus ACL, rectus erit. *f* Rurſus quia quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AM, ML: *g* Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: *h* At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, ſit rectus ex defin. 3. hujus lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; *i* propterea que angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales ſunt angulis DEH,

a 8 undec.
b 47. primi
c 47. primi
d 47. primi
e 48. primi
f 47. primi
g 47. primi
h 47. primi
i 48. primi

DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera
k 26. primi AL, DH, æqualia; kErunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æ-
l 4. primi quales, ex hypotheſi; lerunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales; cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF,
m 26. primi ſint oſtenſa æqualia; merunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli
n 4. primi ACM, DFK, ſunt recti; nerunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum qua-
o 47. primi drata æqualia. o Quia vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML, & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint, ex defin. 3. hujus lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqua-
p 8. primi lis; perunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

COROL-

Digitized by Google

COROLLARIUM.

Itaque, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, utrumque utrique. Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad planum angulornm primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE. Item LAC, HDF: demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. xxxviij.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SInt continue proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque DEF, DEG, FEG, ita ut recta DE, ipſi A; & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. *a* Deinde ad rectam IK, ejuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG, ita ut rectæ IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta

TAB. XXXII. fig. 3.

a 26. unde.

ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æ-
b 14. ſext. quales. b Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorum verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo poſitis, ex conſtructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. præ-
c 31. und. cedentis. c Quare parallelepipeda DH, IN; (Cum habeant baſes DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines,) inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

xxxix. THEOR. 32. PROPOS. 37.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

TAB. XXXII. fig. 4. Sint quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta; item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſive hæc ſint illis ſimilia, ſive non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportionalia; Ut quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inveniantur (per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt

quatuor

quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, ut A, ad F, ita G, ad H. Ut autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B, & ut C, ad H, ita ſolidum C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. hujus lib. Igitur erit ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.

Sint jam è contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoque proportionales: *a* Tribus enim rectis A, B, C, inveniatur quarta proportionalis I, *b* ſuper quam deſcribatur parallelepipedum ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur eſt, ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut jam eſt oſtenſum, ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Ut autem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C, ad ſolidum D: Igitur erit ut ſolidum C, ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. *c* Atque idcirco æqualia erunt ſolida I, & D. Quæ cum ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. hujus lib. Sed plana æqualia, & ſimilia habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 12. ſexti.
b 27. undec.
c 9. quinti.

Brevius tota hæc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico eſſe quoque ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. *d* Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis

d 33. undec.

rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidum B, & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ ſunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoque, ut rectam A, ad rectam B, ita re-
e 33. und. ctam C, ad rectam D. e Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

XXXX. THEOR. 33. PROPOS. 38.

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

TAB. XXXII. fig. 5. PLanum enim AB, rectum ſit ad planum AC, ſitque eorum communis ſectio recta AD; & ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionem AD. Nam ſi fieri poteſt,
a 12. primi cadat extra ad punctum F, a & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD, erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. hujus lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. hujus lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG,

Digitized by Google

TAB. XXXII.

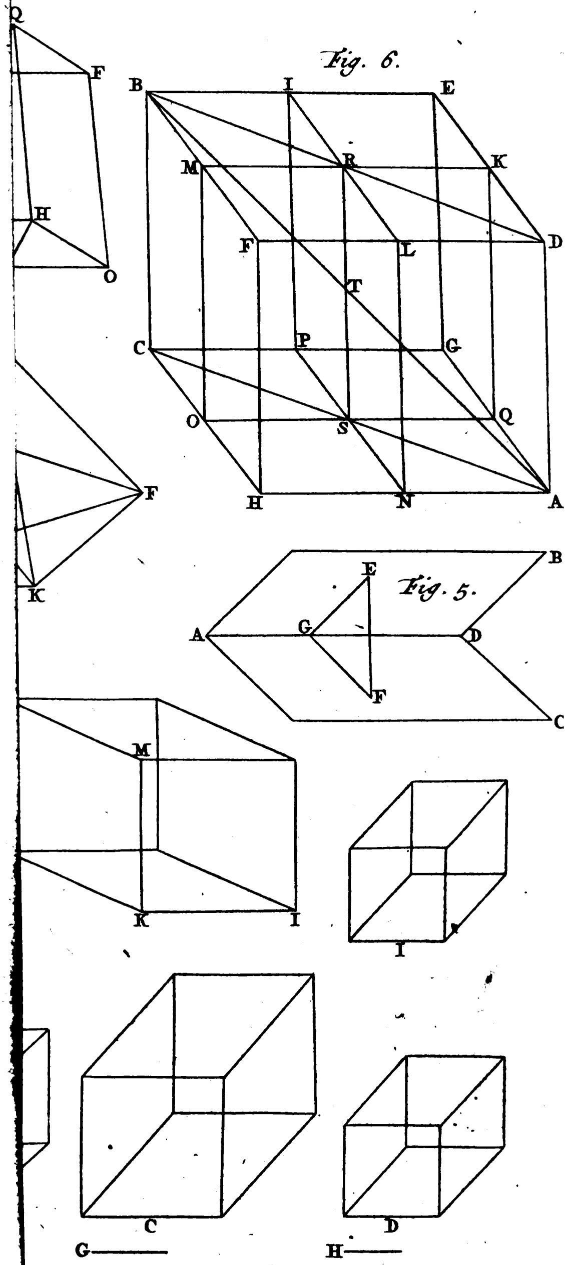


Fig. 6.

Fig. 5.

Digitized by Google

EFG, EGF, recti ſunt, quod eſt abſurdum, *b* cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex E, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, cadet, ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum. b 17. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXI.

Si ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex adverſo, planorum latera biſariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, biſariam ſe mutuo ſecabunt.

Sint parallelepipedi AB, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera biſariam ſecta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extenſa ſint duo plana IN, KO, quorum ſectio communis ſit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, ſe mutuo ſecare biſariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia ſunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, *a* & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum ſint parallelogramma AS, HS,) *b* & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: *c* Erunt & baſes AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. *d* Atqui anguli ASQ, ASO, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus ſunt rectis æquales: *e* Ac propterea AS, CS, unam rectam lineam conſtituent. Eodem modo oſtendentur eſſe æquales BR, DR, & unam ex eis componi lineam rectam. Rurſus quia utraque AD, BC, parallela eſt; & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma

TAB. XXXII. fig. 6.

a 34. primi
b 29. primi
c 4. primi
d 13. primi
e 14. primi

Digitized by Google

f 9. und. gramma AF, FC, ſipſæ quoque inter ſe parallelæ erunt, & æquales. g Quare & rectæ AC, BD, earum extrema conjungentes, parallelæ ſunt & æquales; Ac proinde ipſarum dimidiæ AS, BR, æquales ſunt. Quia vero AC, BD, parallelæ ſunt; h erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipſis plano, ideoque ſe mutuo ſecabunt, in puncto videlicet T. i Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales ſint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: k Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, ſe mutuo ſecant biſariam in T. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex adverſo, &c. Quod erat oſtendendum.

g 33. primi

h 7. und.

i 29. & 15. primi

k 26. primi

COROLLARIUM.

Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo biſariam ſecare in uno puncto, nimirum in puncto T, in quo biſariam dividunt, ut hic demonſtratum eſt, rectam RS.

xxxi.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

Si fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipſa priſmata.

TAB. XXXIII. fig. 1. SInt duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud baſim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; ſitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, ſi plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ,

con-

conſtituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, ejuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorum oppoſita eſſe parallela, facile colligetur ex propoſ. 15. hujus lib. *a* Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum eſt trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, ejuſdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. *b* Quare parallelepipeda AN, GQ, ejuſdem altitudinis ſuper æquales baſes AC, GP, inter ſe ſunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum priſmata ABCDEF, GHIKLM, (*c* nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum adverſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 34. primi
b 31. und.
c 28. und.

EUCLIDIS ELEMENTUM DUODECIMUM.

Et ſolidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Quæ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, ut à diametris quadrata.

TAB. XXXIII. fig. 2. SInt duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, ut quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt, ut AB, ad BC, ita FG, ad GH; *a* erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: *b* Eſt autem angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, *c* nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; *d* erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. *e* Quare erit ut AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, ut AL, ad FM, ita AB, ad FG.

a 6. ſext.
b 21. tertii.
c 31. tertii.
d 32. primi
e 4. ſext.

Digitized by Google

FG. *f* Igitur eſt ut quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, ut à diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum. f 22. ſext.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SInt duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita ſe habet; Sit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel major circulo EFGH. Si enim eſſet æqualis, *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea eſſet circulus ABCD, ad circulum EFGH, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine ſcilicet K, ita ut circulus EFGH, æqualis ſit magnitudinibus I, & K, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium eſt quadrati circa eundem circulum deſcripti, ut ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus, majus erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adjunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi EF, ut ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V *b* Quia ergo triangulum

TAB. XXXIII. fig. 3. a 7. quint. b 41. primi

 ELF,

ELF, dimidium eſt parallelogrammi TEFV; majus erit triangulum ELF, quam dimidium ſegmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula majora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul majora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ EL, LF, &c. ſecentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ majora erunt ſimul, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam vero, ſi à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum EFGH, & magnitudinem I, uti ex ſubjecto lemmate conſtat. Sint jam circuli ſegmenta relicta EL, LF, FM, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ major eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, majus reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, ſimile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi ABC, ADC, bifariam ſecentur in B, & D; & rurſus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diviſa ſit circumferentia ABCD, in quot diſtributa eſt circumferentia EFGH. Nam junctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ ELFMGNHO, ut patet.

d 1. huj. d Quoniam igitur eſt polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, hoc eſt, per hypotheſim, ut circulus ABCD, ad I: Eſt autem polygonum APBQCRDS, minus erit

erit circulo ABCD. *e* Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Oſtenſum autem eſt & majus. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH. *e 14. quint.*

Quamquam autem in figura confertur major circulus cum minore; eodem tamen modo demonſtrabimus, minorem circulum EFGH, non poſſe ad magnitudinem, quæ minor ſit, quam major circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum majoris diametri AC; Ita ut generaliter & univerſe demonſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo minorem: ſive prior circulus major ſit poſteriore, ſive minor.

Sit deinde magnitudo I, major circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & convertendo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, major ponitur circulo EFGH, *f* major quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt jam in priori parte generaliter, non poſſe eſſe ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: ſive prior circulus major ſit poſteriore, ſive minor. Quamvis autem circulus ABCD, major eſt, & EFGH, minor; eadem tamen ratione oſtendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non poſſe habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem *f 14. quint.*

circulo

Digitized by Google

circulo ABCD, majorem: quia eodem modo probabimus, (ſi illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem, quod falſum eſſe jam in priori parte generaliter demonſtratum eſt: Ita ut generaliter & univerſe quoque demonſtratum ſit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo majorem, ſive prior circulus major ſit poſteriore, ſive minor. Non ergo major eſt magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor eſt oſtenſa, æqualis igitur eſt. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; g 7.quint. g ſit autem ut circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis eſt magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, ſive circulus ABCD, circulo EFGH, major ſit, ſive minor. Circuli igitur inter ſe ſunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita eſſe circulum ad circulum, [illegible] num in illo deſcriptum ad polygonum ſim[illegible] deſcriptum. Quoniam tam circulus ad circu[illegible] polygonum ad polygonum eſt, ut quad[illegible] ad quadratum diametri, veluti dem[illegible]

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propo[illegible] majore auferatur majus quam dimidium [illegible] eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur [illegible]

Digitized by Google

quam dimidium; & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

Propoſitæ ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit major. Dico ſi ex AB, auferatur majus quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum majus quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit quam C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, major ſit quam AB, ita ut DE, ſit multiplex ipſius C, proxime major quam AB. Diviſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales, detrahatur ex AB, majus quam dimidium AH, & ex reliqua HB, majus quam dimidium HI; atque hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB, multitudine æquales ſint partibus ipſius DE. Sint ergo jam partes AH, HI, IB, tot, quot ſunt ipſa DF, FG, GE. Quia igitur DE, major eſt quam AB; At ex DE, ablatum eſt DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium; ſi DE, ipſius C, ſit duplex; ex AB, vero majus quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, majus. (Cum enim DE, major ſit quam AB; ſi ex DE, dimidium auferetur, nec non & ex AB, dimidium, eſſet quoque reliquum ex DE, majus reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, majus quam dimidium; erit reliquum ex DE, majus reliquo ex AB.) Rurſus quoniam FE, major eſt quam HB, auferturque ex FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, ſi FE, major ſit quam duplex ipſius C, at ex HB, majus quam dimidium HI, erit eodem modo reliquum GE, majus reliquo IB: TAB. XXXIII, fig. 4.

atque

atque ita procedendo oſtendemus tandem poſtremam partem ipſius DE, qualis hic eſt GE, majorem eſſe poſtrema parte ipſius AB, qualis hic eſt IB. Cum ergo GE, poſtrema pars ipſius DE, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, major quam IB, poſtrema pars ipſius AB. Relicta igitur eſt IR, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à majori auferatur majus, &c. Quod erat demonſtrandum.

Idem demonſtrabitur, ſi ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rurſus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, majus reliquo HB, nec non & reliquum GE, majus reliquo IB; cum ex majori DE, ablatum ſit DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

iij. THEOR. 3. PROPOS[illegible]

Omnis pyramis triangularem hab[illegible] ſim, dividitur in duas pyramides æ[illegible] & ſimiles inter ſe, triangulares h[illegible] baſes, & ſimiles toti; Et in duo pr[illegible] æqualia, quæ duo priſmata majora ſ[illegible] midio totius pyramidis.

TAB. XXXIII. fig. 5, 6. SIt pyramis, cujus baſis triangulum AB[illegible] tex D. Secentur omnia ejus latera[illegible] in E, F, G, H, I, K, connectanturq[illegible] EF, FG, GE, HI, IK, KH, HG, [illegible] IF. Diviſa itaque eſt pyramis in duas py[illegible] AEGH, HIKD, quarum baſes triangu[illegible] HIK, vertices H, D; nec non in [illegible] EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſten[illegible] priſmata, quorum illius baſis eſt paralle[illegible] mum EBFG, & triangula oppoſita EHG[illegible] hujus vero baſis eſt triangulum CFG, cui [illegible]

nitur triangulum KIH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, nec non ejus triangula circumjacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & majora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter, *a* erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC, & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. *b* Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cum ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; *c* erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. *d* Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, ſimilia per coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, ſimilis eſt, per defin. 9. lib. 11. Rurſus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, ſunt parallelæ, *e* erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. *f* Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos ſunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, ſimile eſt: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, ſimilia, per idem coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, ſimilis eſt quoque eidem pyramidi ABCD, per

a 2. *ſext.*
b 9. *und.*
c 10. *und.*
d 4. *ſext.*
e 10. *und.*
f 4. *ſext.*

per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, ſimilia ſunt triangulo ADB, ut
g 21. ſext. oſtenſum eſt ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. g ipſa quoque inter ſe ſimilia erunt. Cum igitur ſint ſuper rectas æquales AH, HD, conſtituta; ipſa erunt æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & ſimilia triangula AHG, HDK, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo ADC, & conſtituta ſuper æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & ſimilia erunt triangula AEG, HIK, cum ſimilia ſint oſtenſa triangulo ABC, & ſuper rectas poſita AE, HI,
h 34. primi h quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum AEIH. Non ſecus æqualia erunt & ſimilia triangula EHG, IDK, cum ſint oſtenſa ſimilia triangulo
i 34. primi BDC, & habeant rectas HE, DI, i quæ æquales ſunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales ſunt & ſimiles, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula unius æqualia ſunt & ſimilia omnibus triangulis alterius, ut demonſtratum eſt.

k 34. primi Rurſus, k quia rectæ EH, HG, GE, æquales ſunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter ſe, & æqualia, per coroll. propoſ. 8. lib. 1. Ac propterea
l 15. und. & ſimilia: l Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ ſint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur ſolidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex adverſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, priſma eſt, ex defin. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum
m 34. primi CFGHIK. m Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula in-
n 15. und. ter ſe, ac propterea ſimilia: n Sunt autem & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum

KIH,

Digitized by Google

KIH, ducitur. Igitur ſolidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex adverſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt ejuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK, & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli CFG, baſis hujus, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. *o* Ipſa inter ſe æqualia erunt. *o 40. und.*

Denique quia priſma EBFGHI, majus eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, nec non pyramidi HIKD, ut perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Majora erunt priſmata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero à dimidio ejuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, major dimidium ejus ſuperat, minor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si fuerint duæ pyramides ejuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum utraque diviſa & in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diviſa ſit utraque pyramidum, quæ ex ſuperiore diviſione natæ ſunt, idque ſemper fiat; erit ut unius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in una pyramide, priſmata, ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SInt ſuper baſes triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, ejuſdem altitudinis, *TAB. XXXIII. fig. 7.*

Digitized by Google

nis, quarum latera bifariam dividantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita ut pyramis utraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV; ut vult propoſitio præcedens: eodemque modo intelligantur eſſe diviſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH, & ſic deinceps. Dico ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD, ad omnia priſmata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, ut eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea diviſa eſt bifariam, ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6.

a 22. ſext. *a* Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ut mox oſtendemus, atque ideo ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia: Et ut unum priſma, videlicet IBKLMN, ad

b 12. quint. unum priſma PFQRST, *b* ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidum, ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps eadem ſemper facta diviſione. [illegible] illæ baſes ad has, ita eſt LKC, baſis quæ [illegible] eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQG, [illegible]

eſt

eſt æqualis, & ſimilis, ut in præcedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Igitur erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſmata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, ut priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis EPRS, quam priſmata pyramidis MNOD, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum ſint, ut duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata pyramidis EFGH, *c* ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hæc illis multitudine ſint æqualia; Erunt quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides ejuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum. c 12. quint.

LEMMA.

Quod autem ſit LKC, ad QRG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, d *ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter, ſecatur autem DC, biſariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa biſariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa biſariam ſecabitur à plano STV. Quare cum illæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac* d. 17. und.

proinde

Digitized by Google

proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, ut baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtravimus.

V. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

TAB. XXXIII. fig. 7. SInt pyramides ejuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis, ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel majus pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Dividatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, juxta propoſ. 3. hujus lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi à pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV; *a* quæ majora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. per lemma propoſ. 2. hujus lib. Sit ergo jam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, majora ſolido X. Dividatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyrami-

a 3. duod.

de

de EFGH. *c* Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, ut baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, ut pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; *d* erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quam ſolidum X. Oſtenſa vero ſunt & majora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH. c 4. *duod.* d 14. *quint.*

Sit deinde ſolidum X, pyramide EFGH, majus. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, ut baſis ABC, ad baſin EFG: Erit convertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ut baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, ut ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, majus ponitur pyramide EFGH, *e* erit & pyramis ABCD, major ſolido Y. Quare erit, ut baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt jam, non poſſe eſſe, ut eſt, baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo majus eſt ſolidum X, pyramide EFGH, ſed neque minus, eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; *f* ſit autem pyramis ABCD, ad ſolidum X, ut ad pyramidem EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum. e 14. *quint.* f 9. *quint.*

COROLLARIUM.

Hinc fit, pyramides ejuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

TAB. XXXIII. fig. 8.

SInt pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, laterũ multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualis; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diviſa. *a* Quia vero eſt, ut baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo ut baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: *b* Sed rurſus eſt ut baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo ut baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit ut baſis GHIKL, ad baſim GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & convertendo ut baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. *c* Rurſus quoniam eſt, ut baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, ut manifeſtum eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit ut baſis ABCDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 5. duod.
b 5. duod.
c 5. duod.

SCHO-

SCHOLIUM.

Quamvis hujus propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus ejuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quarum baſes polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus ejuſdem altitudinis quarum unius baſis plura continet latera quam baſis alterius. Sint enim duæ pyramides ejuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, hujus vero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diviſa. d *Quoniam vero eſt, ut baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, ut baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* e *Erit ut baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, ut baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, ut modo eſt oſtenſum:* f *& ut baſis ADE, quinta quantitas ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem;* g *Erit etiam baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona.*

TAB. XXXIII. fig. 9.

d 5. duod.

e 24. quint.

f 5. duod.

g 24. quint.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Omne priſma triangularem habens baſim,

 divi-

dividitur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habentes.

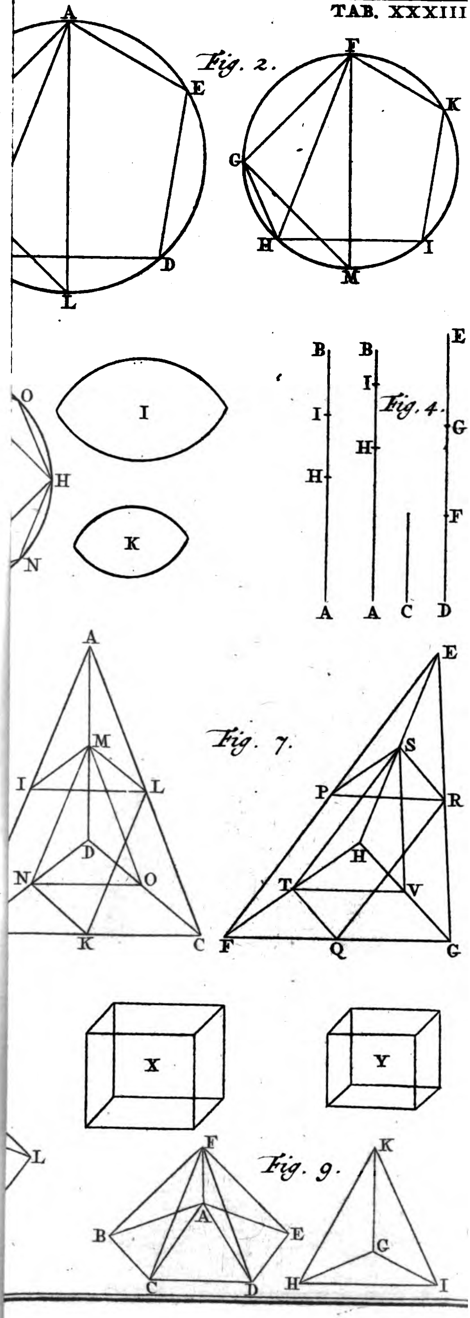
TAB. XXXIV. fig. 1. SIt priſma ABCDEF, cujus duo triangula oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF, FD, in ADEF. *a* 34. primi Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia ſunt; *b* 5. duod. eſtque ut baſis ABC, ad baſin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtitutæ, & ſub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum priſma componentes, ut perſpicuum eſt, æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF; in tres pyramides æquales eſt diviſum. Quo circa omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

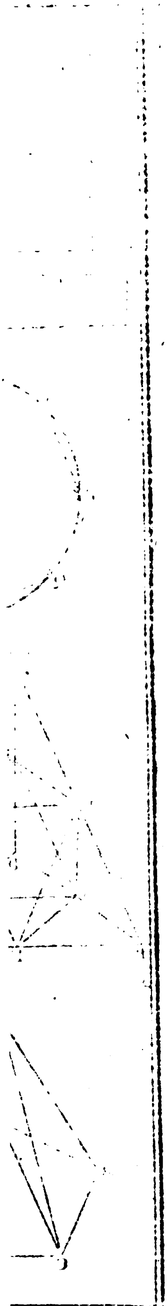
Hinc colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Sive priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.

Digitized by Google

TAB. XXXIII



Digitized by Google



Digitized by Google

Sit enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF, ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Nam ſi ducatur recta DF, erit priſma diviſum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, *c* ut demonſtratum eſt; Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hæc illi ſit æqualis, immo eadem, quod eiſdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. hujus lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem & altitudinem; ac propterea priſma è contrario eſſe pyramidis triplum. *TAB. XXXIV. fig. 2.* c *7. duod.*

Sit deinde pyramis ABCDE, cujus baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diviſum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, ut demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit ut pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB; *d* Ac propterea ut una pyramis ad ſuum priſma; ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſuper eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. propoſ. 5. hujus lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſuper eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine & ſuper eandem baſim ABCD, conſtituta, per coroll. propoſ. 5. hujus lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem *TAB. XXXIV. fig. 3.* d *12. quint.*

 priſma-

priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.

Quod ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diviſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Unde ſingulæ pyramides triangulares horum priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

S C H O L I U M.

Sub eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcunque habeant baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

Quamvis enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula, licet eorum baſes ſint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ: nec non de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen id ipſum demonſtrabimus univerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana adverſa, ſive baſes, ſunt polygona, quamvis plura latera, ſeu anguli in unius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata ejuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum
TAB. XXXIV. fig. 4. *baſes ſint figuræ multilateræ. Dico ut eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis utriuſque baſis ad unum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes; Ac proinde per coroll. prædictum hujus propoſ. quælibet pyramis tertia pars erit ſui*
a 15. quint. *priſmatis. a Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, ut baſis ad baſin, ut oſtenſum eſt propoſ. 6. ejuſque ſcholio. Igitur erit quoque ut baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.*

THEOR.

Digitized by Google

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Similes pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

Sint pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita ut baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula unius ſimilia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AD, parallelæ convenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, ejuſdem cum pyramide altitudinis; cum plana ſolidi BM, ſint parallela, ut facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, ſunt æquales, eſtque ut AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, ſimilia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, ſint æquales, ſitque ut AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & ut DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma BL, BK, parallelogrammis FP, FO, ſimilia. *a* Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppoſitis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppoſitis tribus HQ, EQ, GQ, *b* ſunt æqualia, & ſimilia. Igitur ſex plana circumſcribentia ſolidum BM, ſimilia ſunt ſex planis ſolidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. ſimilia ſunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, *c* priſmata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem

TAB. XXXIV. fig. 5.

a 24. und.

b 24. und.

c 15. quint.

d 11. quint. dem, quam priſmata dicta, earum tripla; d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, e 33. und. quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, ſit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc quoque eſt manifeſtum, ſimiles pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

Sint pyramides ſimiles, quarum baſes rectilinea ſimilia TAB. XXXIV. fig. 6. plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam ſi ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppoſitos rectæ EB, EC, LH, LI, f 20. ſext. f diviſæ erunt baſes ſimiles in triangula numero æqualia, & ſimilia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, ſimilia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum ſimilitudinem, triangula AEF, GLM, ſimilia ſunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Ut autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rurſus quia eſt ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula ſimilia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum ſimilitudinem ſimilia ſint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum ſit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam g 5. ſext. ex æquo, ut FE, ad FB, ita ML, ad MH. g Quare æquiangula, atque adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles erunt pyramides EBCF, LHIM; h 8. duod. Item CDEF, IKLM. h Quapropter, ut demonſtratum eſt, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides

GHLM,

GHLM, LHIM, IKLM, ſingulæ ad ſingulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, ſingulorum ad ſingula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unam & eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionem, triplicatam ſcilicet illius; *i* Atque idcirco erit ut una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, *k* cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod eſt propoſitum.

i 12. *quinti.*
k 8. *duod.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. vij.

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales.

Sint æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum baſes ABC, EFG, & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propoſitione dictum eſt, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt priſmata DBCILA, HFGNPE, cum ſint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum ſint priſmatum dupla, æqualia quoque erunt. *a* Quare baſes eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc eſt, erit ut baſis BI, ad baſin FN, ita altitudo ſolidi FQ, ad altitudinem ſolidi BM: *b* Ut autem baſis BI, ad baſim FN, ita eſt trian-

TAB. XXXIV. fig. 7.
a 34. *und.*
b 15. *quinti.*

Digitized by Google

triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque, ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

Sint jam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, ut prius; *c* cum ſit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum, & altitudines eorundem reciprocæ; *d* Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 15. quint.
d 34. und.

viij. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

TAB. XXXIV. fig. 8.

HAbeant conus & cylindrus baſin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel major, vel minor triplo coni. Sit primum major quam triplus coni, magnitudine E, ita ut cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, ut

ut ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; a eſtque ut baſis ad baſim, ita parallelepipedum ad parallelepipedum ejuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidium parallelepipedi baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, majus erit, quam dimidium cylindri, cujus baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adjunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, ut ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma, ad priſma ut baſis ad baſim, quemadmodum, ad propoſ. 7. hujus lib. demonſtravimus; Ac propterea priſma baſis AKB, majus erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cujus baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, majora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul majora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo priſmata ejuſdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ majora erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta, & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cylindro, cujus baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum ſemper

a 32. und.

b 41. primi

ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni, per lemma propoſ. 2. hujus lib. Sint jam ſegmenta cylindri relicta baſium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni una cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ major eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, majus quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cujus eadem cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. hujus lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur major eſt cylindrus triplo coni.

Sit deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus major quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus major quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita ut conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, ut ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtravimus, *d* eſtque ut baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem ejuſdem altitudinis; Erit quoque pyramis ſuper ABCD, dimidium pyramidis ſuper baſin FGHI; ac proinde pyramis ſuper baſin ABCD, major erit dimidio coni, cujus baſis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, biſariam in K, L, M, N, adjunganturque rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, ut ad propoſ. 27. lib. 3. demonſtravimus,

d 6. *duod.*

ſtravimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligantur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. e Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin ABOP, f cum pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, major erit dimidio ſegmenti coni, cujus baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, majores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul majores ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides ejuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ majores erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cono, cujus baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam majorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cujus baſis eſt circulus ABCD; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: per lemma propoſ. 2. hujus lib. Sint jam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahantur ſegmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine

e 41. primi

f 6. duod.

Digitized by Google

E, ipſa magnitudo E, quæ major eſt præfatis coni ſegmentis; erit reliqua pyramis, cujus baſis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, major quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis majus erit cylindro. Quocirca, cum priſma eandem habens baſim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, ut ſupra in coroll. propoſ. 7. hujus lib. à nobis eſt demonſtratum, erit hujuſcemodi priſma majus cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo cylindrus minor eſt triplo coni: Sed neque major triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, proptereaque conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes.

TAB. XXXIV. fig. 9. Sint ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico ut eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, ſit ut baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel major erit, vel minor cono EFGHM. *a 7. quint.* Si enim eſſet æqualis, *a* haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea eſſet conus ad conum, ut baſis ad baſim: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, dividanturque

Digitized by Google

que peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adjungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuper baſin EFGH, ejuſdem altitudinis, & à reliquis ſegmentis auferantur pyramides ejuſdem altitudinis baſium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur, ut in poſteriore parte præcedentis propoſitionis oſtenſum eſt; relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, exceſſus coni EFGHM, ſuper N, per lemma propoſ. 2. hujus lib. Sint ergo jam ſegmenta coni relicta baſium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul; ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmentis major eſt, erit reliqua pyramis, cujus baſis polygonum EPFQGRHS, ejuſdem altitudinis cum cono, major quam N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, ſimile polygono EPFQGRHS, ut in propoſ. 2. hujus lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propoſ. 2. hujus lib. eſt ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Ut autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N. *c* & ut polygonum, ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem ejuſdem altitudinis cum conis; Erit quoque ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto, *d* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Oſtenſa autem fuit & major. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

c 6. duod.

d 14. quint.

Sit ſecundo N, major cono EFGHM. Cum

igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & convertendo ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, major ponitur cono EFGHM; major quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt jam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut eſt baſis illius coni ad baſin hujus coni. Non ergo major eſt N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque minor eſt oſtenſa; Æqualis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; *e* Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM, erit quoque ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

e 7. quint.

f 15. quint.

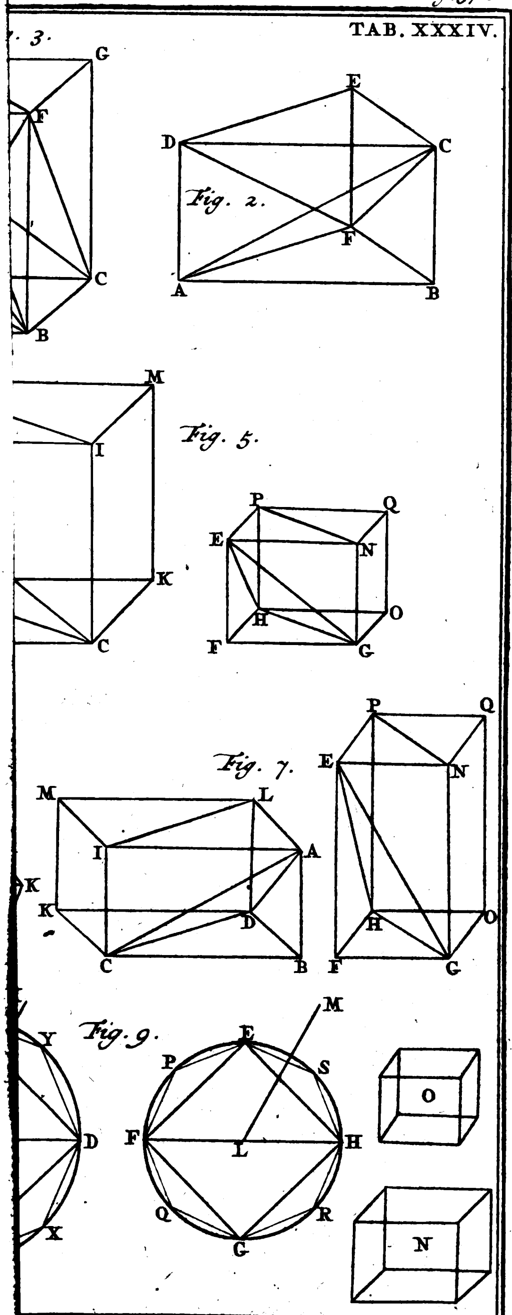
f Quoniam autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM.) Erit quoque ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo uſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, conos & cylindros ejuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, eſſe inter ſe æquales: propterea quod eandem proportionem habeat, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

Item ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et

æquales


TAB. XXXIV.
. 3.
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 9.

Digitized by Google

æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac converſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

Sint ſimiles coni, & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, axes vero IK, LM, & diametri baſium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel major cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, *a* haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, eſſet quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita ut rurſus pyramis EPFQGRHSM, major oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, ut habeantur duo triangula BKT, FMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, ſimiles ponuntur; erit, ex 24. defin. lib. 11. ut diameter BD, ad diametrum FH. *b* ac propterea ut ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutando ut BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propptereaque axes recti ad eorum baſes; *c* Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; *d* Ac propterea ut KB, ad BI, ita erit MF, ad

TAB. XXXV. ſig. 1.

a 7. *quint.*

b 15. *quint.*

c 6. *ſext.*

d 4. *ſext.*

ad FL. Ut autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint æquales, ut in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtenſum eſt; ſitque ut BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP; *e* erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, ut KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia ſunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehenſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur, ad circulum, ABCD, *f* erunt baſes KB, KT, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum utrobique ſit proportio æqualitatis. *g* Quoniam vero ut KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item ut MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoque ut KT, ad BT; ita MP, ad FP; Et convertendo ut BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cum ſit ut TK, ad KB, ita PM, ad MF, & ut KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et ut BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti oſtenſum eſt; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, *h* ideoque æquiangula erunt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cum ſint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides ſimiles, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. hujus lib. Ut autem BT, ad FP, ita eſt, BI, ad FL, ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP; *i* Et ut BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit

e 6. ſext.

f 4. primi

g 7. quint.

h 6. ſext.

i 11. quint.

Digitized by Google

erit ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto; *k* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & major. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM. k14. quint.

Sit deinde N, major cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime oſtendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & convertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. hujus lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, major ponitur quam conus EFGHM, *l* erit quoque conus ABCDK, major quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum eſt enim, non poſſe conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam ejus, quam habent baſium diametri. Non ergo major eſt magnitudo N, cono EFGHM. Sed neque minor eſt oſtenſa. Æqualis igitur eſt; *m* ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata l14. quint. m 7. quint.

Digitized by Google

proportione diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata.

9. quint. *a* Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo uſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

11. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si cylindrus plano ſecetur adverſis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

TAB. XXXV. fig. 2. SEcetur cylindrus ABCD, plano GH, parallelo adverſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axem EF, in I. Dico ut eſt cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramque partem, una cum ejus axe & rectangulo EC, ad cujus revolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ EK, KL, æquales ipſi EI: Item quotcunque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad revolutionem rectanguli EC, deſcribent circulos GH, PR, QS, Ta, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componen-

ponentes totum cylindrum SQXY. Quoniam vero tam cylindri SP, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA, & ſub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales ſunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, ſuper æquales baſes XY, VZ, Ta, CD, & ſub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex eſt axis IL, ipſius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex eſt axis IO, ipſius axis IF. Quoniam autem ſi axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi IO, (multiplici axis IF, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. liquet. Si vero axis major eſt axe, cylindrus quoque cylindro major eſt; Et ſi minor, minor in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit per defin. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, ſecundam magnitudinem, ut cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur adverſis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xi.

Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, ut altitudines.

SInt ſuper baſes æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, ſeu altitudines, (Nam in conis & cylindris rectis axes ipſi ſunt altitudines) LE, MF. Dico eſſe conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, ut eſt altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur TAB. XXXV. fig. 3.

tur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, una cum ejus axe LE, & rectangulo AG; abſcindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, ut fiat cylindrus GHOP, ejuſdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll.
a 7. quint. propoſ. 11. hujus lib. a cylindrus AG, ad ipſos
b 13. duod. eandem habebit proportionem. b Eſt autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, ut axis, ſeu altitudo LE, ad axem, ſeu altitudinem EN, hoc eſt, altitudinem MF, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, ut altitudo LE, ad altitudinem MF.
c 10. duod. c Quia vero coni ABE, CDF, ſunt tertiæ par-
d 15. quint. tes cylindrorum AG, CI; d ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, ut altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut altitudines. Quod oſtendendum erat.

14. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

TAB. XXXV. fig. 4. Sint æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes altitudineſve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Quare erit ut baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad

ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

Quod ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, major, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, ut in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; *a* erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. *b* Eſt autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: *c* Item ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſint baſes & altitudines.

a 7. quint.
b 11. duod.
c 14. duod.

In conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, *d* cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare ut oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo uſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, ut in figura apparet.

d 10. duod.

Sed jam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit ut baſis AB, ad baſin, DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib.

Quod

Quod ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN. e11.duod. e Eſt autem ut baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: f14.duod. f Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales: erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; g9.quint. g Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

At vero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales, quo oſtendimus cylindros æquales eſſe. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandum.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 16.

Duobus circulus circa idem centrum exiſtentibus, in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

TAB. XXXV. fig. 5. Sint duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in majori ABC, inſcribere polygonum æquilaterum, cujus latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib.

lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, major eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium IK, & ſic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quam CG, per lemma propoſ. 2. hujus lib. Sit igitur jam arcus CK, arcu CG, minor, & ſubtendatur recta CK. Dico rectam CK, eſſe unum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, dividatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales dividatur, in quot diviſus eſt quadrans BC; nec non ſemicirculus AHC, in totidem partes, quot continet ſemicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ ſubtendantur, *b* quæ æquales quidem erunt ipſi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti ſunt; *c* erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipſum continget, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cum æqualia ſint lateri CK, *d* ideoque æqualiter cum CK, à centro F, diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtentibus, in majori circulo, &c. Quod erat faciendum.

b 29. tertii.
c 29. primi
d 14. tertii.

COROLLARIUM.

Hinc eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed tota extra ipſum cadere.

Hu-

Hujuſmodi enim eſt linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.

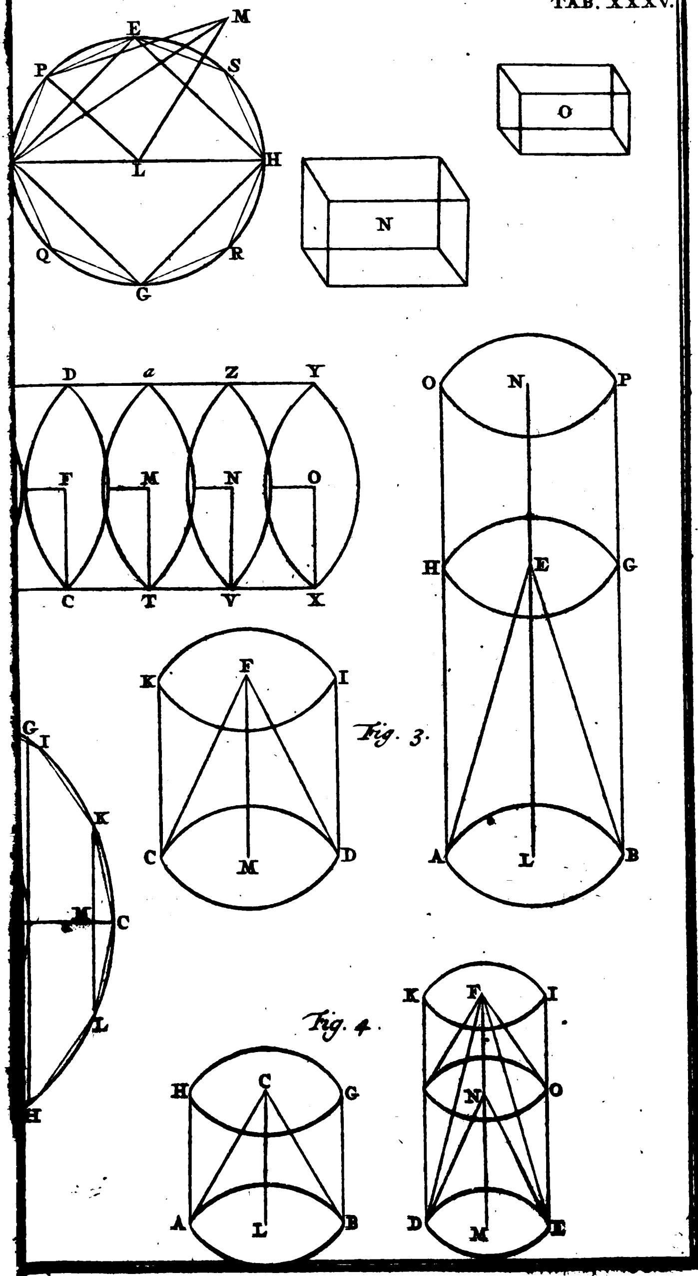
XIV. PROBL. 2. PROPOS. 17.

Duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

TAB. XXXVI. fig. 1. SInt duæ ſphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in majori ABCD, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintque communes ſectiones factæ in ſphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumvolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cum ducantur ex centro ſphærarum, ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, ſeſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, ut ſint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. *a* Deinde in majori circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem ut facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gg, ad circumferentiam uſque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectæ Gg, *b* applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Ae. Quia vero ſi arcui Cg, intelligatur ſubtendi recta, ut fiat triangulum GCg, *c* latus Cg, oppoſitum majori angulo,

a 16. duod.
b 1. quarti.
c 19. primi.

TAB. XXXV.


E
M
P
S
L
H
Q
R
G
O
N
D
a
Z
Y
F
M
N
O
C
T
V
X
O
N
P
H
E
G
A
L
B
K
F
I
C
M
D
Fig. 3.
G
I
K
M
C
L
H
Fig. 4.
H
C
G
A
L
B
K
F
I
O
N
D
M
E

Digitized by Google

gulo, nempe recto, majus eſt latere Gg, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cg, major recta Ae; ac proinde arcus Cg, arcu Ae, major erit, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus Cd, arcui Ae, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium LK, & ſic deinceps; relinquetur tandem arcus minor arcu Cd, ſeu arcu Ae, per lemma propoſ. 2. lib. hujus. Sit ergo jam arcus CK, minor; Eritque recta CK, ſubtenſa minor quam recta Ae, hoc eſt, quam Gg, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, eſſe unum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum Cd, minorem arcu Cg, non tangat circulum EFGH, ut ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet; multo minus recta CK, ſubtendens arcum minorem arcu Cd, eundem circulum tanget. Rurſus ducta diametro KN, *e* erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæræ majoris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, *f* quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes ſectiones, circulos, ut jam dictum eſt, quorum ſemicirculi ſint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ majoris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales diſtribuatur, in quot diviſus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; *h* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus ſubtenſæ, nimirum CK, KL, LM, MD, CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Conjunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY,

e 12. *und.*

f 18. *und.*

g *ſchol.* 27. *tertii.*

h 29. *tertii.*

i quæ

i 38. und. *i* quæ in communes ſectiones AC, NK, cade
k 6. und. *k* eruntque inter ſe parallelæ.

Quoniam igitur triangulorum PCX, SK anguli PXC, SYK, recti ſunt, ex defin. 3.
l 27 tertii. 11. *l* & anguli PCX, SKY, æquales, quod æquales ſint peripheriæ AOP, NOS, quibus ſiſtunt; (Nam ſi ex ſemicirculis AOC, NOI æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, liqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erun Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PC æquales duobus angulis SKY, SYK, triang SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis a
m 26 primi gulis oppoſita, æqualia; *m* Igitur reliqua late PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqua erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales ſi
n 33 primi & parallelæ; ſi connectatur recta XY, *n* æqua quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter ſe
o 2. ſext. *o* At quia & rectæ CK, XY, parallelæ ſunt quod latera IC, IK, proportionaliter ſecta ſin (Si enim ex ſemidiametris IC, IK, æqualibu demantur æquales rectæ CX, KY, relinquent & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, ut IX
p 9. und. ad XC, ita IY, ad YK.) *p* Erunt parallelæ quo que PS, CK, inter ſe, cum utraque parallela ipſi XY,
q 7. und. *q* ideoque eas conjungentes rectæ CP KS; in eodem cum ipſis plano exiſtent. Totu igitur quadrilaterum CKSP, in uno erit plano Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planu circuli ABCD, perpendiculares, & connectantu rectæ QC, TK, oſtendemus ſimiliter CK, QT eſſe parallelas; atque adeo ipſas PS, QT, inte ſe parallelas eſſe, cum eidem CK, ſint parallelæ totumque quadrilaterum PSTQ, in uno eſſe pla no. Eadem ratione in uno erit plano quadrilate
r 2. und. rum QTVR. *r* Eſt autem & triangulum RVO in uno plano. Si igitur eadem conſtructio exh beatur ſuper reliqua latera KL, LM, MD ductis ſcilicet quadrantibus OL, MO, OD, ne non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemi ſphærio, ut tota ſphæra major repleatur quadri lateris, & triangulis, quæ ſimilia ſunt prædictis inte

qua

Digitized by Google

quadrantes OC, OK, ſuper latus CK, conſtructis, inſcriptum erit in ſphæra majori ſolidum polyedrum circumſcriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

Ducatur enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in ſcholio ſequenti oſtendemus. Quoniam igitur ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; *s* erit quadratum rectæ IC; quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia. Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipſæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter oſtendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales eſſe & inter ſe & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, deſcriptus per quatuor puncta C, K, S, P, tranſibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos deſcribi poſſe, demonſtrabimus. Quoniam vero, ut poſtea oſtendemus, angulus CZK, obtuſus eſt; *t* erit quadratum rectæ CK, majus quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, majus erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

s 47. *primi*

t 12. *ſecu.*

Ducatur ex K, ad rectam AC, perpendicularis Ka. Cum igitur AC, dupla ſit ipſius AI, & Aa, major ſit, quam AI, erit AC, minor duplo ipſius Aa. Quam ob rem cum ſit, *u* ut AC, ad Aa, ita rectangulum ſub AC, aC, ad rectangulum ſub Aa, aC, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, Aa, & eadem altitudo aC; erit quoque rectangulum ſub AC, aC, minus duplo rectanguli ſub Aa, aC. *x* Eſt autem rectangulum ſub AC, aC, æquale quadrato rectæ

u 1. *ſexti.*

x 17. *ſexti.*

Digitized by Google

CK, & rectangulum ſub Aa, aC, æquale quadrato rectæ Ka; quod recta CK, inter AC, aC, ſit media proportionalis; & recta Ka, inter Aa, aC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Ka. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit majus eſſe duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ Ka, majus quadrato rectæ ZC. *y*Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Ia, aK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Ia, aK. Si ergo ex his dematur quadratum majus, nempe rectæ aK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, majus quadrato reliquo rectæ Ia; ideoque recta IZ, major quam recta Ia. Quapropter cum punctum a, non tangat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta Ka, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans eandem ſphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint à ſphæra EFGH, quam punctum Z, ut mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

y 47. primi

Sed & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta Ig, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Gg: *z*Eſt autem CK, major quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, ut mox demonſtrabitur; multo major erit Gg, quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gg, majus quadrato rectæ ZC. *a*Quia vero quadratum rectæ Ig, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gg; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarnm IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Ig, IC, æqualium æqualia;

z 19. primi

a 47. primi

erunt

erunt & quadrata rectarum IG, Gg, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gg, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter, exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, ut prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

Ducatur rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Ib, eritque b, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, ut demonſtratum eſt; Connexis autem rectis bP, IP, cum angulus IbP, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. *b* erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Ib, bP. Quia vero & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Ib, bP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia; Eſt autem quadratum rectæ ZC, majus quadrato rectæ bP, quod & linea ZC, major ſit, quam linea bP, ut poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Ib, reliquo quadrato rectæ IZ, majus erit; ideoque & linea Ib, major quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum b, extra ſphæram, EFGH, exiſtet, quam punctum Z: proptereaque multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæram minorem EFGH. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſſint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

b 47. *primi*

COROLLARIUM.

Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quavis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile

 præ-

præ dicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in una ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam ejus, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium, dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; ut conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra majorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad baſium angulos; ob ſimilitudinem baſium: Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in una ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, ut conſtat ex coroll. propoſ. 8. hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum unius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque
c 15. quint. adeo diametrorum ſphærarum, *c* cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

S C H O L I U M.

Quoniam vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, ut vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breviter à nobis erunt demonſtranda.

TAB. XXXVI. fig. 2. *Primum itaque oſtendendum eſt, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod ut commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura prima eſt ut IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſint.) Eſt autem IK, major, quam*
d 14. quint. *IY; d erit & KC, major quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſa ipſi SP; erit quoque KC, major quam SP. Ac propterea in hac ſecunda figura, arcus CK, major erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib.*

3.

Digitized by Google

3. e*Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, ut ex conſtructione figuræ primæ conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, majores; Atque idcirco quilibet arcus CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque à ſemicirculo ſuperabitur; ac proinde multo magis ſegmentum SP, minus erit ſemicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non eſſe in illis ſegmentis, ſed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione oſtendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demiſſas, qualis eſt Ib cadere intra quadrilatera; nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum OKV, ductam, cadere intra ipſum. Quia igitur arcus CK, quadrante major eſt; angulus CZK, obtuſus erit. nempe recto major, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, ut perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.* e28 tertii.

Secundo demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum b, in quadrilatero CKSP, & adjungantur rectæ Ib, Zb. Quoniam ergo angulus IZb, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. f *Erit latus illi oppoſitum Ib, majus latere IZ, quod minori angulo IbZ, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum b, longius à centro I, diſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.* TAB. XXXVI. fig. 3. f 19. primi

Tertio, ac ultimo probandum eſt, rectam ZC, majorem eſſe recta bP. Quod ut aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam PS, majorem eſſe recta QT. Deſcribatur igitur pars primæ figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo eſt triangulum ICK, perpendiculares Ql, Tm, TAB. XXXVI. fig. 4.
g *quæ in communes ſectiones IC, IK, cadent,* g 38. undec.
h *eruntque inter ſeſe parallelæ, ut de rectis PX,* h 6. undec.

 ST,

ST, dictum eſt. Quod ſi adjungatur recta lm; erunt QT, ml, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe & æquales PS, XY. i 2. ſext. *i Quia vero ml, ipſi CK, parallela eſt; quod latera IC, IK, proportionaliter ſint ſecta in l, & m, veluti diximus de recta XY;* k30.primi *k erunt quoque ml, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ut IY, ad YX, ita Im, ad ml, eſt autem IY major quam Im.* l14.quint. *l Igitur & YX, major erit quam ml; Ac proinde & PS, quæ æqualis eſt ipſi XY, major erit quam QT, quæ æqualis eſt ipſi ml.*

TAB XXXVI. fig. 5. *Hoc ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris Z, b, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediantur que è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP, bP, bS, bT, bQ. Si igitur ZC, non credatur major, quam bP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus bS, bP, & baſis KC, major eſt baſe PS;* m25.primi *m erit angulus KZC, major angulo SbP: Eadem ratione major erit angulus SZP, angulo TbQ. At quoniam baſes KS, CP, baſibus ST, PQ, ſunt æquales* n8.primi *n erunt anguli KZS, CZP, angulis SbT, PbQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, majores erunt quatuor angulis ad b: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta ZC, rectæ bP.*

Sit deinde ZC, minor, quam bP. Et abſcindantur bn, bq, br, bt, ipſis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturque rectæ nq, qr, rt, tn, o 2. ſext. *o quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris ſectæ ſunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit ut bS, ad SP, ita bq, ad qn. Cum ergo bS, major ſit quam bq,* p14.quint. *p erit & SP, major quam qn. Eademque ratione majores erunt ST, TQ, QP, rectis qr, rt, tn; Ac propterea cum PS, minor ſit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ qn, qr, rt, tn, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ*

bn

bn, bq, br, bt, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, ſint æquales; q *erunt anguli ad Z, majores angulis ad, b: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi ſunt quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta ZC, quam bP: Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Major igitur eſt. Quod erat oſtendendum.* q 25. primi

THEOR. 16. PROPOS. 18. XV.

Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SInt duæ ſphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico ſphæram ABC, ad ſphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra ABC, ad aliam ſphæram GHI, minorem, vel KLM, majorem, quam DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primum ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque ſphæra GHI, concentrica ſphæræ DEF. *a* Inſcribatur in ſphæra majori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI; Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit ut ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, major ſit polyedro ASBTCVXY, *b* erit & ſphæra GHI, major polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

TAB. XXXVI. fig. 6.

a 17. duod.

b 14 quint.

Habeat ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram

 KLM,

KLM, majorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit ut ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et convertendo, ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zab. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zab, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, major ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, major quam ſphæra Zab. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Zab, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, majorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, ut demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

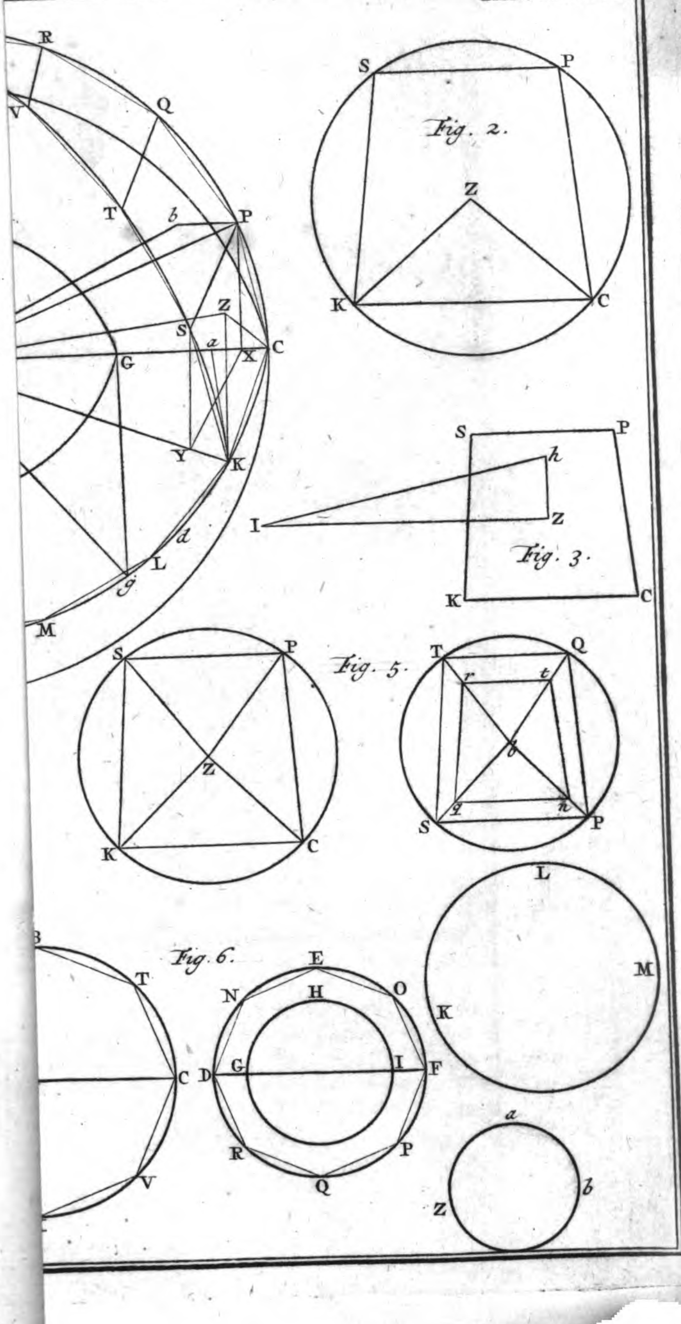
COROLLARIUM.

Hinc fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, ut polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonſtratum eſt.

FINIS.

Digitized by Google

TAB. XXXVI.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google